

THESE

présentée par

Abdelhamid CHAACHOUA

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Didactique des Mathématiques**

Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes.

Soutenue le 29 mars 1997

Composition du jury :

Président : **Nicolas Balacheff**, Directeur de Recherche CNRS
Rapporteurs : **Gilbert Arsac**, Professeur des Universités, Lyon 1
Yves Chevallard, Professeur des Universités, IUFM d'Aix-Marseille
Examinateurs : **Madeleine Eberhard**, Maître de Conférences, Université J. Fourier, Grenoble 1
Colette Laborde, Professeur des Universités, IUFM de Grenoble, directeur de Thèse
Bernard Parzysz, Maître de Conférences, Université de Metz

Thèse préparée au sein du Laboratoire LEIBNIZ - IMAG - UJF

à Yasmina

Remerciements

Je tiens tout d'abord à présenter mes vifs remerciements à Colette Laborde pour avoir accepté de diriger cette thèse. Elle a su, tout au long de ce travail, réagir à mes choix sans pour autant imposer son point de vue. Grâce à de nombreux échanges, aux cours desquels elle m'a fait part de ses critiques constructives, elle m'a appris le métier de chercheur.

Je remercie Nicolas Balacheff, Directeur de Recherches CNRS, d'avoir bien voulu présider le jury.

Je remercie Gilbert Arsac, Professeur des Universités à Lyon 1, et Yves Chevallard, Professeur des Universités à l'IUFM de Marseille, d'avoir accepté de rapporter sur mon travail .

Je remercie aussi Madeleine Eberhard, Maître de conférences à Grenoble 1 et Bernard Parzysz, Maître de conférences à Metz, d'avoir accepté de faire partie du jury de soutenance de cette thèse.

J'exprime ma reconnaissance à :

Bernard Capponi pour sa participation aux différentes réunions de travail où, par sa grande expérience, il m'a apporté des réflexions sur l'enseignement de la géométrie dans l'espace.

Teresa Assude pour sa contribution à mon travail par les différents échanges qui m'ont permis de préciser des outils d'analyse de protocoles.

Ce travail n'aurait pas pu aboutir sans le soutien moral de ma femme Yasmina. C'est grâce aux encouragements qu'elle m'a prodigués et à l'intérêt qu'elle a porté à la réussite de ce travail que j'ai pu surmonter des moments difficiles. Je la remercie pour sa compréhension face à ma faible disponibilité pendant ces années.

Je remercie mes amis Paula Moreira-Baltar, Marilena Bittar, Vanda Luengo et Franck Bellemain pour le soutien moral et l'aide qu'ils m'ont apportée tout au long de ces années, et jusqu'au bout.

Mes remerciements vont aussi à Mireille Dupraz pour avoir accepté d'être lectrice dans la phase de rédaction.

Je remercie Annie Bessot et Madeleine Eberhard pour les échanges sur mon travail et pour leur soutien moral.

Je remercie Ana Paula-Jahn, Sophie Soury-Lavergne, Lucile Vadcard, Julien Rolland, Driss Mensouri et Robert Neyret pour le rôle qu'ils ont joué au sein du groupe des thésards à un moment ou un autre.

Pour ma mère qui a tant sacrifié pour moi.

Je remercie ma mère, ma tante Zoubaida Chaachoua et mon oncle Mohamed Mouffak pour leur soutien moral, mes oncles Abdelhak Zougari et Abdelmaoula Chaachoua pour le soutien et l'aide qu'ils m'ont apportés, mes cousins Redouan Ben Seffaj et Said Mouffak qui m'ont accueilli en France.

Mes remerciements vont à tous les membres des équipes Didatech et EIAH qui, par les débats scientifiques et amicaux, m'ont enrichi sur les plans intellectuel et humain.

Enfin, je remercie tous les enseignants qui m'ont accueilli dans leurs classes et les élèves des classes de Seconde du Lycée Stendhal qui ont accepté de se soumettre aux questionnaires.

Table des matières

Partie A

Partie B

Partie C

Partie D

PARTIE A

CHAPITRE A

PROBLEMATIQUE DU DESSIN

A partir des travaux sur la problématique dessin - figure, nous proposons un cadre théorique pour définir le dessin comme objet physique ou comme modèle. Ce cadre théorique nous permet d'étudier l'évolution du statut du dessin dans l'enseignement. Dans notre travail, nous nous limitons au dessin modèle d'un objet géométrique. Des travaux de recherche et de l'analyse des manuels nous dégageons des fonctions du dessin dans les problèmes de géométrie plane. Cette étude nous servira de référence pour le cas de la géométrie dans l'espace. Plus précisément, nous nous interrogeons sur les fonctions du dessin dans la résolution des problèmes de géométrie dans l'espace.
Ce travail nous permet ensuite de définir notre cadre de recherche.

1. DESSIN, FIGURE, OBJET GEOMETRIQUE ET OBJET PHYSIQUE

La distinction entre dessin, figure et objet géométrique a été et continue à être au centre d'étude de plusieurs travaux en didactique des mathématiques.
Arsac (1989, p.86), propose une distinction entre dessin et figure en opposant "le monde sensible" et "le monde géométrique" :

> Nous distinguerons dans la suite le dessin et la figure, désignant par dessin le dessin concrètement tracé sur une feuille de papier (ou dans le sable pour Archimède) et par figure l'objet mathématique dont le dessin n'est qu'une représentation... Ainsi, la figure est un élément du "monde mathématique" et non du monde sensible.

Dans le même sens, Parzysz (1989), réserve "figure" pour l'objet géométrique et "dessin" pour une représentation graphique de cette figure. Il examine les cas de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace (nous y reviendrons dans la suite).

Laborde et Capponi (1994, pp.168-169) reprennent cette distinction entre dessin, figure et objet géométrique en se plaçant dans le triangle "référent, signifiant, signifié" :

> “ En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors

définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente; le deuxième terme étant pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associé pour ce sujet. Ce signifié correspond à ce que Fishbein (1993) appelle *figural concept*."

Dans cette distinction, les auteurs n'évoquent pas le monde sensible. Nous supposons que c'est :
- soit parce qu'ils considèrent la géométrie comme un modèle : "un dessin renvoie aux objets théoriques"
- soit parce que leur étude se limite au cas de la géométrie plane : le dessin lui même peut être considéré comme "objet physique".

Dans l'enseignement de la géométrie et surtout de la géométrie dans l'espace, les tâches portent sur trois types d'objets :

- Objet géométrique : c'est un objet de la géométrie en tant qu'une théorie mathématique,
- Objet physique : nous l'utilisons comme synonyme de l'objet matériel dans le monde sensible,
- Dessin : représentation sur un support matériel.

Nous proposons d'étudier dans ce qui suit les relations que peuvent entretenir ces objets entre eux, en partant du schéma ci-dessous :

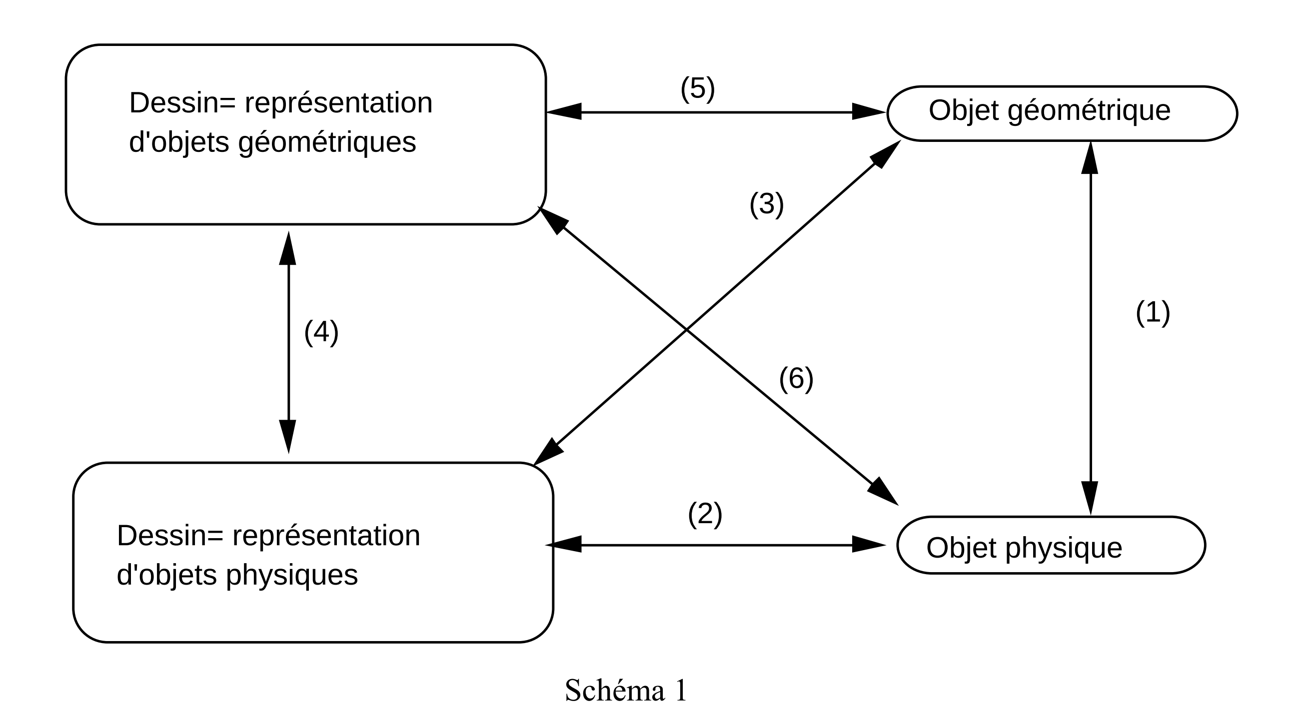


Schéma 1

2. OBJET PHYSIQUE / OBJET GEOMETRIQUE

A un problème spatial P_S dans le monde sensible, on peut associer dans une modélisation géométrique, un problème géométrique P_g. Ainsi, à chaque objet physique correspondent un ou des objets géométriques. Seuls les aspects de l'objet physique, qui apparaissent pertinents pour la résolution du problème, seront pris en compte par la modélisation, et donc traduits en termes géométriques.

Un des moyens pour mettre en relation l'espace sensible et la théorie est la représentation graphique. Ces représentations sont diverses et ont différentes fonctions dans l'enseignement.

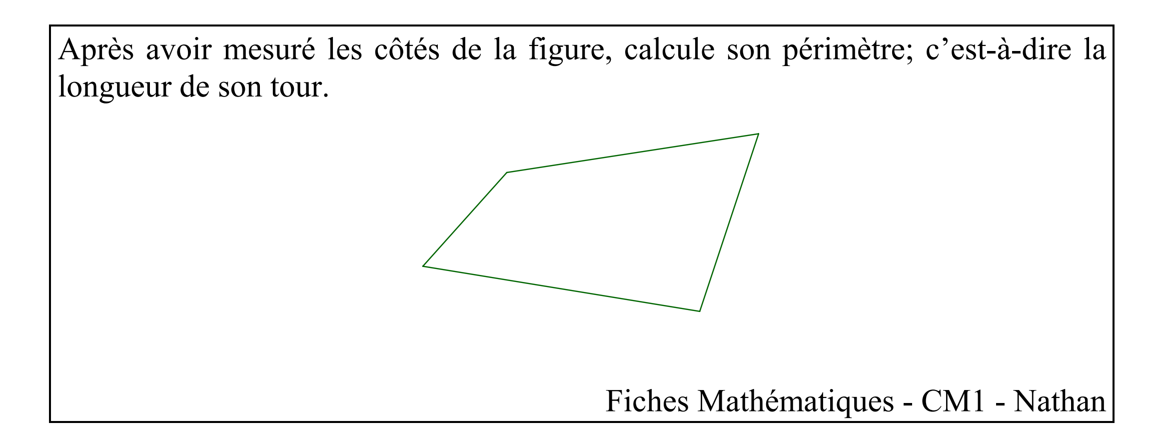
3. STATUT DU DESSIN DANS L'ENSEIGNEMENT

Nous examinerons, dans le paragraphe 3.1, le dessin comme objet physique et ensuite, dans le paragraphe 3.2, le dessin comme modèle d'un objet théorique ou d'un objet physique.

3.1. Dessin comme objet physique

Dans ce cas, le dessin est l'objet d'étude, sur lequel le sujet est amené à travailler comme le montre l'exercice ci-dessous, le sujet (l'élève) doit prendre des mesures sur le dessin fourni. C'est une tâche similaire à celle où le sujet doit calculer le périmètre d'un terrain. La différence réside dans le fait qu'on ne travaille pas dans le même espace : le

premier relève du micro-espace et le second du macro-espace, au sens de Brousseau (1982).



Fiches Mathématiques - CM1 - Nathan

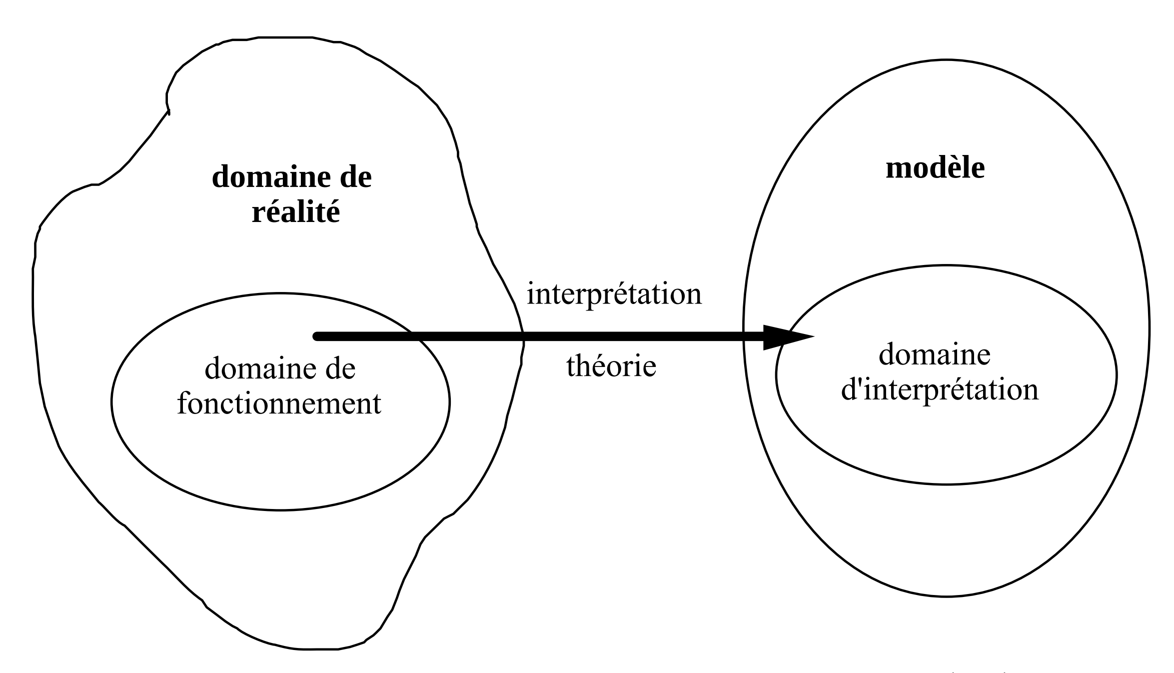
Ici nous considérons que le dessin fait partie du monde sensible, il est un objet physique.

3.2. Dessin comme modèle

Laborde (1992) considère le dessin comme un modèle de l'objet géométrique. Cette position s'inscrit dans une problématique autour de la notion de modèle que nous lui empruntons pour notre cadre théorique[1]. Elle attribue deux fonctions complémentaires au processus de modélisation, celle d'abstraction et celle de représentation :

> Une modélisation met en jeu une certaine abstraction du domaine de réalité concerné en ne retenant de ce dernier qu'un certain ensemble d'objets et de relations qui sont représentés dans le modèle. Le modèle ne rend compte que d'une partie du domaine de réalité...A chaque modèle est donc attaché un *domaine de fonctionnement* dans le domaine de réalité dépendant des objets et relations retenus par la modélisation.
> ...
> Un modèle fournit aussi une représentation du système d'objets et de relations retenus pour la modélisation ou encore, pour prendre une image plus parlante, une incarnation de ce système dans un support d'expression...Mais toute interprétation issue du support ne donne pas une information nécessairement valide sur le domaine de réalité. On peut ainsi délimiter un *domaine d'interprétation* à l'intérieur du support du modèle.

[1] On trouvera dans Laborde (1992) un développement assez clair de la notion de modèle.



Laborde, 1992, p3.

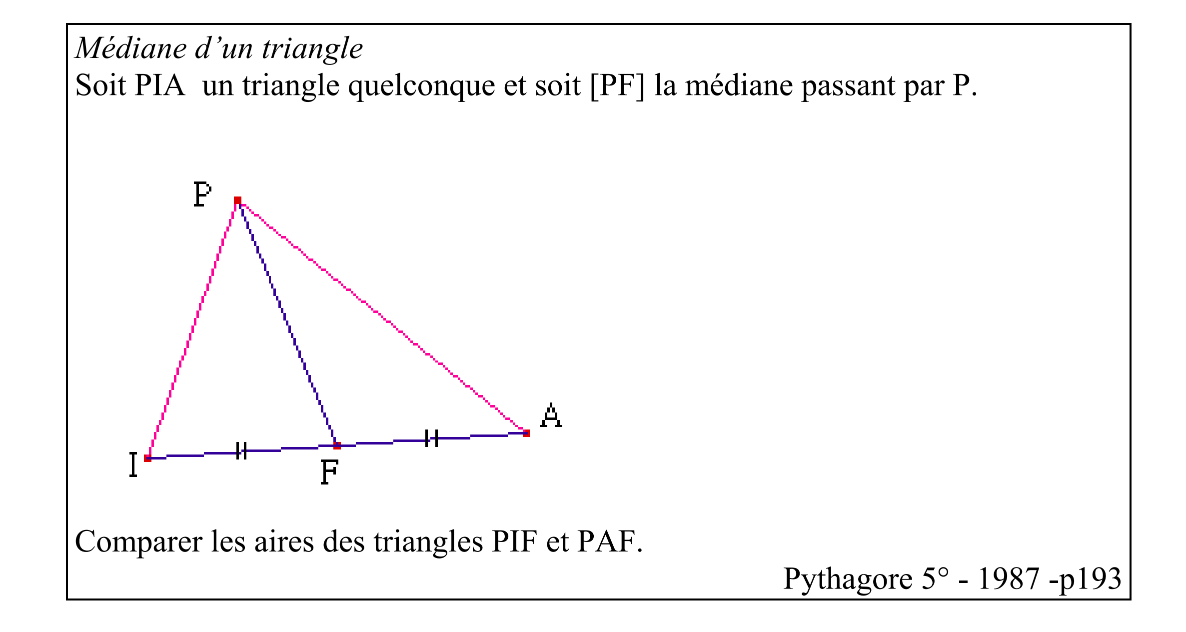
Dans l'enseignement, le dessin peut être considéré comme un modèle d'un domaine de réalité. On peut distinguer deux grandes catégories de domaines de réalités : ceux de nature théorique et ceux du monde sensible. Chaque catégorie peut comporter elle même différents objets qu'on cherchera à modéliser.

3.2.1. Dessin comme modèle d'un objet géométrique

Le dessin est ici considéré comme signifiant d'un référent théorique. Nous sommes alors dans le cas envisagé par Capponi et Laborde.

Médiane d'un triangle

Soit PIA un triangle quelconque et soit [PF] la médiane passant par P.



Comparer les aires des triangles PIF et PAF.

Pythagore 5° - 1987 -p193

L’énoncé de l’exercice ci-dessus est accompagné d’un dessin qui renvoie à un objet géométrique "triangle PIA et sa médiane [PF]". Examinons, les rapports entre ce dessin et l'objet géométrique.

Le dessin permet de rendre compte de certaines propriétés de l’objet géométrique : F milieu du segment [AI] se traduit sur le dessin par l'égalité des longueurs des segments [IF] et [FA], de plus sur ce dessin sont placées des marques typographiques sur chacun des segments [IF] et [FA] pour désigner l'égalité de leurs longueurs. Par contre, le dessin ne peut rendre compte de toutes les propriétés géométriques, et il ne le fait que partiellement. Il y a deux raisons pour cela. La première est que certaines relations ne sont pas visibles directement, comme l'égalité des aires des deux triangles PIF et PAF. La deuxième est l'ambiguïté des relations, par exemple un point représenté sur le segment [IF], peut appartenir au segment [IF] ou à la droite [IF].

En géométrie dans l'espace, plusieurs propriétés de l'objet géométrique ne peuvent pas être traduites par des relations spatiales sur une feuille de papier, à moins de faire appel à des codes et à des conventions de représentations comme par exemple pour la perpendicularité de deux plans.

De même, les propriétés spatiales du dessin ne peuvent pas toujours renvoyer à des propriétés géométriques retenues pour le problème. Par exemple, la position du dessin sur une feuille de papier n'est pas pertinente pour le problème géométrique. Certaines propriétés spatiales, qui renvoient à des propriétés géométriques, peuvent aussi être non pertinentes parce que le dessin n'est qu'une instanciation matérielle d'un objet géométrique. Ainsi, il se peut que dans le cas d'un dessin donné il y ait égalité de deux côtés alors que cette relation ne fait pas partie des données du problème à résoudre. Le dessin fournit alors un "cas particulier du problème". Dans la pratique on cherche à éviter les cas particuliers trop flagrants.

> On peut attacher un *domaine de fonctionnement* au dessin (ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines propriétés spatiales du dessin ... Inversement toutes les propriétés spatiales du dessin ne peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l’objet, au dessin est attaché un *domaine d’interprétation*. (B. Capponi et C. Laborde 1992, p. 179-180)

3.2.2. Dessin comme modèle d'un objet physique

Dans certaines situations d'enseignement, surtout à l'école primaire et au début du collège, le dessin est utilisé comme modèle d'un objet physique (l'axe (2) du Schéma 1). Nous illustrerons les rapports entre le dessin et l'objet physique qu'il modélise par l’exemple suivant :

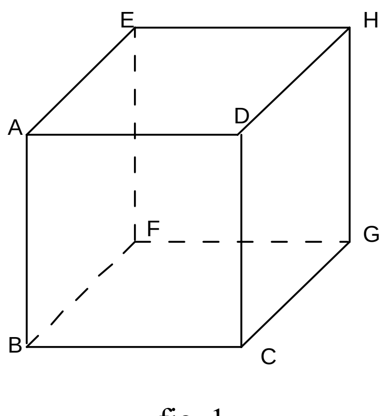


fig. 1

Ce dessin rend compte des arêtes et des sommets du cube. Mais, il ne tient pas compte des déformations éventuelles d'une arête du cube en tant qu'objet physique, puisque celle-ci est représentée par un segment. Dans l'enseignement, on utilise ce dessin comme modèle d'un cube "objet physique", pour étudier des propriétés du cube en tant qu'objet géométrique. Ce dernier est lui même un modèle de l'objet physique. On travaille selon les trois axes (1), (2) et (3) du schéma 1.

Le dessin a donc plusieurs statuts dans l'enseignement. Comment ces statuts évoluent-ils, au cours du cursus scolaire de l'enseignement secondaire ? C'est à cette question que l'on se propose de répondre dans le prochain paragraphe.

4. EVOLUTION DU STATUT DU DESSIN DANS L'ENSEIGNEMENT ACTUEL

Au cours du cycle 1 de l'école primaire, l'enfant[2] manipule des objets physiques. En particulier il doit "se situer, repérer des objets par rapport à soi ou par rapport à des repères fixes."[3]. Autrement dit, l'enfant travaille au niveau de "l'objet physique". Au terme de l'enseignement secondaire, l'élève est amené à travailler au niveau de "l'objet géométrique". Le dessin va jouer un rôle important dans le passage du premier pôle au second. Comme le soulignent les instructions des programmes du collège, l'enseignement des mathématiques comporte deux aspects :

> Il apprend à relier des observations du réel à des représentations : schémas, tableaux, figures.
> Il apprend à relier ces représentations à une activité mathématique et à des concepts.
>
> (BO n° spécial 4-30 Juillet 1987)

4.1. L'enseignement primaire

2 Selon les termes du B.O.

3 B.O. n°9 du 1° mars 1990- Les cycles à l'école primaire - CNDP (1991) - p.58.

Dès le cycle 2 de l'école primaire, en géométrie plane on commence à travailler sur le dessin comme objet physique, alors qu'en géométrie dans l'espace l'objet physique est le solide.

4.2. L'enseignement du collège

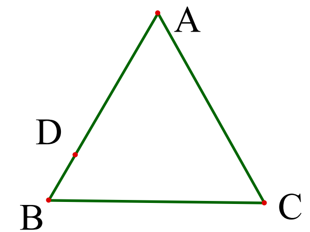
4.2.1. Géométrie plane

Au début du collège (Sixième, Cinquième), en géométrie plane, le dessin est toujours considéré comme objet physique.
Le programme de sixième se définit d'abord comme un prolongement de l'école primaire:

> De l'école élémentaire, les élèves apportent une expérience des figures les plus usuelles. L'objectif fondamental en sixième est encore la description et le tracé de figures simples. Au terme d'un processus progressif, le champ des figures étudiées est enrichi, le vocabulaire est précisé et les connaissances sont réorganisées à l'aide de nouveaux outils, notamment la symétrie orthogonale par rapport à une droite (symétrie axiale).
>
> (BO n° spécial 4-30 Juillet 1987)

Cet extrait montre qu'un des objectifs de la classe de sixième est d'une part l'enrichissement du champ des figures, qui sont des dessins, et d'autre part la mise en place d'un vocabulaire précis. Dès cette classe, le dessin prendra, dans certaines situations, le statut d'un modèle d'un objet géométrique. Selon les programmes, l'initiation au raisonnement déductif doit se mettre en place dès les classes de Sixième et Cinquième. Seulement, l'élève peut, par exemple, prendre des mesures sur le dessin par l'utilisation d'une règle graduée, ou constater une propriété par l'usage des instruments. Prenons l'exemple suivant, du manuel "Puissance Math, 6°, 1990, p.40" :

Reproduire la figure ci-dessous où ABC est un triangle équilatéral et D un point du côté [AB]. Tracer la parallèle à (BC) passant par D; elle coupe [AC] en E.
Quelle semble être la nature du triangle ADE ? Comment le vérifier en se servant du compas ?



Les auteurs de ce manuel distinguent dans une rubrique "apprendre à raisonner" trois types d'exercices (p.38) :

• Dans de nombreux exercices, on demande de constater certaines propriétés. • Dans d'autres exercices, on demande d'examiner si une propriété semble réalisée. • Dans certains cas, on peut faire la preuve de ce que l'on constate.

Dans l'exemple ci-dessus, l'élève est invité à conjecturer la nature du triangle ADE et à la vérifier à l'aide de l'instrument "compas". Cette vérification utilise la définition d'un triangle équilatéral, et l'élève est amené à faire un pas du raisonnement déductif.
Nous pensons qu'à partir de la classe de quatrième, l'enseignant mettra davantage l'accent sur le dessin comme modèle d'un objet géométrique. En effet, ce changement de statut du dessin correspond à une phase où l'élève va changer son rapport avec la géométrie par la mise en place de la démonstration. Elle se manifeste par des interdictions de prendre des mesures sur le dessin, ... etc.

4.2.2. Géométrie dans l'espace

En ce qui concerne la géométrie dans l'espace, les élèves du collège commencent par fabriquer des solides, objets physiques, à partir d'un patron fourni. Ensuite, il leur est proposé des activités autour d'un solide, objet géométrique ou objet physique, représenté en perspective cavalière et/ou par son patron :

L'objectif est d'apprendre à voir dans l'espace. L'usage d'une perspective (cavalière) et la fabrication d'un patron sont complémentaires : à l'aide d'un patron le lien sera établi avec le rectangle.	- Représenter un parallélépipède rectangle en perspective. - Décrire, fabriquer un parallélépipède rectangle de dimensions données.

(BO n° spécial 4-30 Juillet 1987, 6°)

Les tâches "fabriquer", "représenter", témoignent du travail dans l'axe (2) du schéma (fig. 1). Le travail sur le dessin modèle d'un objet physique permet de mettre en place des notions géométriques comme le parallélisme et l'orthogonalité en classe de cinquième :

Dans l'espace, les études expérimentales s'amplifient. Elles fournissent un terrain **pour dégager quelques propriétés élémentaires**[4] du parallélisme et de l'orthogonalité.

L'usage d'une perspective (cavalière) et la fabrication d'un patron sont complémentaires. Les activités sur le parallélépipède rectangle ont permis de retenir, sous la forme d'images mentales, des situations de parallélisme et d'orthogonalité. Ce travail se poursuit grâce à l'étude de quelques autres prismes droits et du cylindre de révolution. **L'expérience ainsi acquise permettra de dégager et de mettre en oeuvre sur des exemples simples des propriétés du parallélisme et d'orthogonalité dans l'espace**[5]. Mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible des élèves.	- Représenter à main levée et décrire un prisme droit dont la base est un triangle ou un parallélogramme, un cylindre de révolution. - Fabriquer un prisme droit triangulaire ou un cylindre de révolution de dimensions données.

(BO n° spécial 4-30 Juillet 1987, 5°)

En classe de troisième, le solide est considéré comme un objet géométrique et, par conséquent, le dessin change de statut : le dessin représente un solide en tant qu'objet géométrique. Autrement dit, c'est un modèle d'un objet géométrique.

La *description* et la *représentation des objets géométriques* usuels du plan et de l'espace, le calcul des grandeurs attachées à ces objets demeurent des objectifs fondamentaux.

...

Avec les travaux sur les solides, les outils acquis, comme le théorème de Pythagore, ou nouveau comme le théorème de Thalès, sont mis en oeuvre à la fois dans le plan et dans l'espace. La recherche de sections planes d'un solide doit se limiter à des exemples très simples.

(B.O. n°12 du 23 mars 1989, 3°)

Les instructions ne font plus référence à la fabrication de solides, objets physiques. La mise en oeuvre des outils géométriques se fait par les travaux sur les solides, objets géométriques, à travers leur représentation.

4.3. L'enseignement du lycée

4 C'est nous qui soulignons
5 C'est nous qui soulignons

Le dessin est maintenant définitivement considéré comme un modèle d'un objet géométrique en géométrie plane et de l'espace.
Pour la géométrie dans l'espace, le travail sur les objets géométriques peut faire appel au dessin, modèle de l'objet géométrique, et/ou faire appel à l'utilisation de maquettes comme le souligne le programme de la classe de seconde :

> Les activités exploiteront conjointement des maquettes des objets étudiés et des représentations de ces objets effectuées, selon les problèmes posés, à main levée ou à l'aide des instruments de dessin.
>
> (Encart n°1 : 1990, classe de seconde, p. 19)

Autrement dit, on travaille selon les axes (1), (5) et (6) (du Schéma 1, p.19).
Notons que même lorsque qu'on travaille au niveau des objets théoriques, l'étude de ces derniers se fait à l'aide de figures :

> En géométrie plane comme en géométrie dans l'espace, tout point de vue axiomatique est exclu. La pratique des figures doit tenir une place centrale, car elle joue un rôle décisif pour la maîtrise des notions mathématiques mises en jeu.
>
> (Encart n°1 : 1990, classe de seconde, p. 15)

Le rôle central des dessins mentionné par les programmes nous conduit à nous intéresser aux rôles du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Plus précisément, nous nous sommes demandés quelles sont les fonctions du dessin, en tant que modèle d'un objet géométrique, dans les problèmes de géométrie.

5. DESSIN COMME MODELE D'UN OBJET GEOMETRIQUE

Nous aborderons dans le premier paragraphe le cas de la géométrie plane, d'une part en mettant en évidence l'importance du dessin et différentes questions soulevées dans des travaux récents, d'autre part, en dégageant les fonctions attribuées au dessin dans la pratique de l'enseignement après la fin de la réforme des mathématiques modernes.
Le cas de la géométrie dans l'espace fera l'objet du second paragraphe où nous examinerons dans quelle mesure le dessin peut ou non remplir les fonctions dégagées auparavant.

5.1. Le dessin comme modèle d'un objet de la géométrie plane

Selon les époques, le dessin a connu des rôles divers dans l'enseignement et n'a pas toujours eu la même importance. Ceci est allé de pair avec la place du rapport entre

l'espace sensible et l'espace géométrique théorique dans l'enseignement. En effet, ce rapport a connu des moments forts dans l'enseignement et des moments où il était presque inexistant, comme l'a souligné Chevallard (1991, p.53), en parcourant trois périodes récentes :

> “A cet égard, on observera une évolution nette de cet enseignement sur une période de quelques décennies. Alors en effet, que l'enseignement «prémoderne» (antérieur à la réforme des mathématiques modernes) se référait encore, grosso modo, aux définitions euclidiennes évoquées précédemment, la solution «moderne», promue dès la fin des années 1960, a rendu illégitime une telle référence...La solution géométrique «moderne» - à base axiomatique - a, dans un premier temps, résolu par le vide les problèmes des rapports entre le géométrique et le sensible, en installant d'emblée l'espace géométrique comme en soi. Au passage on comprendra mieux pourquoi ce type d'exposé s'est flatté parfois de pouvoir se passer des figures (i.e. de tracés) dans la mesure en effet où l'espace géométrique ne contient pas d'objets matériels (lesquels relèvent de l'univers sensible), dans la mesure où les tracés de la géométrie tendent, culturellement, à se confondre avec la représentation des objets de l'espace sensible (et non des figures de l'espace géométrique), les tracés n'avaient pas lieu d'être...Alors que, sous la pression des contraintes qui venaient refouler le théoricisme moderniste, l'enseignement postmoderne redécouvrait le sensible - un sensible d'opérette, à la vérité -, il se trouvait en même temps démuni pour indiquer adéquatement le rapport entre sensible et géométrique, et laissait fleurir la solution empiriste (qui feint d'ignorer le décalage entre droite géométrique et droite sensible, par exemple), solution virtuellement (ou même réellement) présente dans la solution moderne dont il héritait”.

La réforme des mathématiques modernes a été particulièrement marquée par une rupture avec le rôle et la place du dessin, et à la place qu'on a accordait au dessin dans l'enseignement. Le dessin n'avait plus une place importante dans l'enseignement des mathématiques modernes. Ce point a été souligné par Bessot (1983, p.34) :

> “La prépondérance prise par l'affine dans ces programmes découle de l'abandon, dans le champ d'investigation de la géométrie, du domaine des configurations, au profit presque exclusif de celui des vecteurs, le domaine numérique n'étant que peu exploré. Cela a permis au nom de l'idéologie structuraliste et du mythe de la rigueur axiomatique de ramener l'étude de la géométrie à l'exposé d'un dogme "bien léché", mais a conduit par la force des choses à ne plus travailler sur des figures. La construction de figures reste possible mais n'a plus un caractère aussi impérieux, au moins dans le principe de travail.”

La fin de la période correspondant aux mathématiques modernes a été marquée en particulier par le fait que la figure doit être au centre de l'apprentissage. Ainsi, plusieurs travaux en didactique autour de la problématique du dessin et de la figure ont vu le jour. C'est ce que nous proposons d'examiner dans le paragraphe suivant.

5.1.1. Le dessin à travers certains travaux

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'examiner, à travers certains travaux, la place et le rôle du dessin, en tant que modèle d'un objet géométrique, dans les problèmes de géométrie.

Dans un colloque Inter-Irem sur l'enseignement de la géométrie[6], où plusieurs intervenants se sont penchés sur cette question, Bessot (1983) soulève la nécessité d'une réflexion sur le rôle, le fonctionnement et la production des figures en géométrie. Il attribue au dessin un rôle pour l'apprentissage : "... la figure permet à l'élève une prise de contact concrète, quasi-physique avec la situation étudiée ; il peut ainsi, mettre en oeuvre dès le début ses capacités par l'action (la construction, le dessin et la réflexion qui doit guider cette action). L'usage et la pratique des figures offrent donc un moyen de donner à l'élève une part plus active dans son apprentissage" (Bessot, 1983, p.35). Dans la suite de son article, il va préciser les notions de figure et configuration ainsi que les rapports qu'elles entretiennent. Il attribue au moins deux rôles, par rapport à la résolution de problèmes, aux figures en géométrie : "d'une part, elles illustrent les situations étudiées, d'autre part, elles servent de support à l'intuition au cours de la recherche en faisant apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relation qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal"(Bessot 1983, p.35).

S'intéressant aux fonctions du dessin dans la phase de recherche, Duval (1994, p.121) a montré que le dessin (désigné par le terme figure dans ces travaux) peut être une aide de par certaines fonctions qu'il est susceptible de remplir:

> "Permettant ainsi de saisir d'un coup une situation dans son ensemble, les figures sont le moyen le plus direct d'en explorer les différents aspects, d'anticiper les résultats d'une démarche, de sélectionner une solution."

Dans le même article Duval (1994, p.123) examine dans quelle mesure le dessin peut remplir ces fonctions, en cherchant en particulier à répondre aux deux questions :

> "1. Comment une figure peut-elle fonctionner de façon heuristique dans une phase de recherche ? Car la rapidité et l'économie d'appréhension qu'une figure permet de réaliser par rapport à l'énoncé d'un problème de géométrie n'expliquent pas comment cette figure peut aussi aider à trouver l'idée d'une solution.
> 2. Pourquoi une figure n'apporte-t-elle pas toujours une aide heuristique ? Cette deuxième question se pose du fait qu'une figure n'aide pas toujours à voir."

---

6 Enseignement de la géométrie, Bulletin Inter-Irem n°23, 1983.

Ainsi, l'auteur déplace-t-il la question de l'utilité d'une figure vers des questions sur le fonctionnement de celle-ci dans la démarche géométrique. Il met en évidence quatre types d'appréhensions nécessaires pour développer "la manière mathématique de regarder une figure en géométrie" (Duval, 1994, p.123) : perceptive, discursive, séquentielle et opératoire. Nous nous proposons de les rappeler :

- l'appréhension perceptive : elle "permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme, ou un objet, soit dans un plan soit dans l'espace" (Duval, 1994, p.123)

- l'appréhension discursive : "une figure est regardée par rapport à une dénomination (soit, un ...,), une légende ou une hypothèse qui en fixent explicitement certaines propriétés... L'appréhension discursive d'une figure correspond à une explicitation des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explicitation est de nature déductive." (Duval, 1994, p.124)

- l'appréhension séquentielle : "elle concerne l'ordre de construction d'une figure. Cet ordre dépend non seulement des propriétés mathématiques de la figure à construire mais aussi des contraintes techniques des instruments utilisés." (Duval, 1994, p.126)

- l'appréhension opératoire : elle a une fonction heuristique dans la résolution de problème. C'est "l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures." (Duval, 1994, p.126).
Duval (1994) distingue trois types de modifications de la figure :

- les modifications méréologiques : consistent à partager une figure en sous-figures, à considérer la figure comme sous-figures d'une autre figure,
- les modifications optiques : consistent à agrandir, à diminuer ou à déformer une figure,
- les modifications positionnelles : consistent à déplacer ou à tourner une figure dans un plan.

Les appréhensions perceptives et discursives sont souvent en opposition parce que "la figure montre des objets qui se détachent indépendamment de tout énoncé et que les objets nommés par l'énoncé des hypothèses ne sont pas nécessairement ceux qui apparaissent spontanément." (Duval 1988, p.58). Pour l'auteur, le problème de la figure géométrique se trouve dans ce décalage. En particulier, l'appréhension perceptive peut être un obstacle pour la résolution de problème, par exemple lorsque l'élève n'arrive pas à discerner sur la figure des sous-figures pertinentes.

De plus, les élèves, dans leur majorité, restent au niveau de l'appréhension perceptive. Ils "ne soupçonnent pas qu'une figure ne doit pas être regardée qu'à travers ou en fonction de propriétés ou de conditions formulées comme hypothèses" (Duval, 1988, p.61). Ceci se manifeste par le "non-retour" au problème une fois que le dessin est construit. Ce retour correspond à l'interprétation discursive de la figure.
L'auteur s'intéresse donc au dessin comme un outil heuristique pour la résolution de problèmes, en particulier dans les problèmes de démonstration. Il montre que si le dessin peut être une aide pour la démarche géométrique, il peut être aussi un obstacle.

G. Arsac, toujours dans la problématique de la démonstration en géométrie, voit la nécessité d'un travail autour du dessin dont l'objectif est que les rapports à ce dessin des élèves, de cinquième et quatrième, évoluent. Il souligne (Arsac, 1992) dans la conclusion du chapitre 8 :

> "Pour l'élève, le nouveau rapport au dessin qui suppose d'envisager celui-ci dans un aller-retour constant avec l'énoncé se traduit, surtout au début, par trois grandes interdictions par rapport à sa pratique antérieure:
> - ne pas se contenter de mesurer
> - ne pas se contenter de constatations
> - ne pas tirer des conclusions de l'examen de cas de figures particuliers
> ...
> On constate donc que la démonstration en géométrie présente des difficultés particulières à cause du statut de l'objet sur lequel elle porte, la figure."

On retrouve dans cette citation, l'importance de l'aller-retour entre le dessin et l'énoncé. Les interdictions évoquées par Arsac ont pour objet de changer le statut du dessin : on passe d'un dessin "objet physique" au dessin "modèle d'un objet géométrique".
Dans une recherche récente Fregona (1995) a étudié “les rapports d'un acteur avec son milieu quand il s'agit de tracer une figure superposable à une autre par le biais d'une situation de communication.” (Fregona, 1995, p.7). Avec la structuration du milieu, elle a montré que le statut d'un dessin est défini par sa fonction dans la situation et par la position du sujet : élève ou professeur. Dans la problématique Fregona (1995, p.9) adopte une hypothèse de travail : “les figures sont des instruments adéquats pour transmettre, dans la scolarité élémentaire, les savoirs géométriques”. C'est dans ce contexte, que l'auteur a étudié les conditions de constitution d'un milieu efficace ou non pour l'apprentissage de la géométrie.

Ces travaux attestent l'intérêt qu'il faut porter au rôle du dessin et de la figure dans l'enseignement des mathématiques : rôle heuristique des figures dans la résolution de problèmes de géométrie, nécessité de changer le rapport des élèves au dessin, dessins

comme instruments pour la transmission des savoirs géométriques, étude du milieu où la figure est enjeu de transmission, ...
Cela suppose, que dans l'enseignement de la géométrie, le dessin a des fonctions variées selon les situations, en tant que modèle d'un objet géométrique. Nous nous intéressons aux fonctions du dessin, modèle d'un objet géométrique, dans les problèmes de géométrie et plus particulièrement dans leur résolution.

5.1.2. Fonctions du dessin dans les problèmes de géométrie plane

A partir des réflexions développées par des chercheurs ou des enseignants, nous avons montré, dans le paragraphe précédent, que le retour du dessin dans l'enseignement après la réforme des mathématiques modernes a été justifié par le rôle qu'il peut jouer dans la résolution de problèmes et par là dans l'apprentissage. Nous nous intéressons aux fonctions du dessin dans les problèmes de géométrie.
Nous distinguons trois niveaux d'intervention du dessin : dans l'énoncé, dans la résolution, dans la solution. Nous présenterons ci-dessous les principales fonctions que nous avons dégagées de l'analyse des manuels du lycée et des travaux cités précédemment.

a) Fonctions du dessin dans l'énoncé

Dans les manuels, souvent les énoncés sont accompagnés d'un dessin. Ce dernier remplit certaines fonctions pour le traitement du problème.
- Illustration de l'énoncé
Une des fonctions principales du dessin est d'illustrer l'énoncé, en particulier dans le cas où le problème présente une certaine complexité dans les hypothèses ou lorsque dans l'énoncé comporte plusieurs hypothèses.
Dans l'exemple ci-dessous, l'énoncé présente une certaine complexité de formulation dans la définition des points E et F: "les parallèles à (AB) et (AC) menées de D recoupent le cercle en E et F."[7]

---

7 Remarquons que le dessin permet également de trasmettre implicitement que D est distinct de A

2 Le cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre $[BC]$, A et D sont deux points de C. Les parallèles à (AB) et (AC) menées de D recoupent le cercle en E et F. Quelle est la nature du quadrilatère $BECF$?

Ex2 p229 Terracher 2°, 1994

Cette fonction dépend essentiellement du domaine de fonctionnement du dessin.

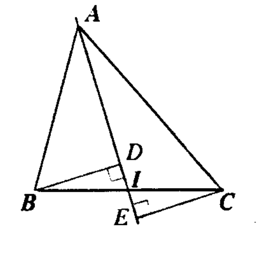
- Prise en charge des hypothèses

Une autre fonction du dessin est la prise en charge de certaines hypothèses non explicitées dans l'énoncé. Dans l'exemple ci-dessous, les points D et E sont définis uniquement sur le dessin.

1 **Avec la médiane**

La droite (AI) étant une médiane du triangle, montrer que $BD = CE$ (*cf.* figure).

☞ Utiliser le résultat I en calculant les aires des triangles ABI et ACI avec (AI) comme base.



Expliquer pourquoi ce résultat peut être formulé ainsi : *« B et C sont équidistants de la médiane issue de A ».*

Ex1 p217 Terracher 2°, 1994

Nous pensons que la prise en charge d'une hypothèse par le dessin, sans que celle-ci soit explicitée dans l'énoncé, ne peut pas se faire seulement sous forme d'une relation spatiale. Mais il est nécessaire de faire appel à des marques typographiques, puisque l'élève ne peut pas considérer les relations lues sur le dessin comme hypothèses[8]. Nous la considérons comme une hypothèse sur le "contrat" actuel. Par exemple, dans le cas de la figure (fig. 3) il est légitime que l'élève considère que la droite Δ est perpendiculaire au segment [BC] alors que ce ne l'est pas dans le cas de la figure (fig. 2).

8 En revanche, celles-ci peuvent induire des conjectures.

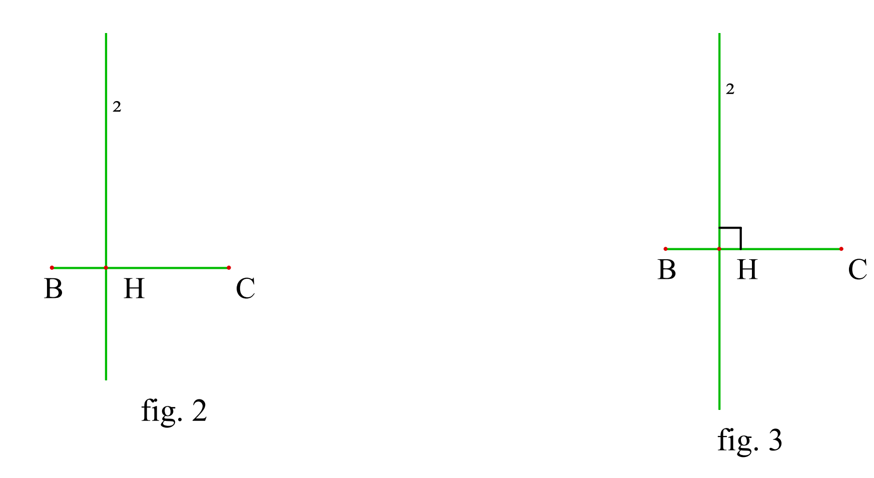


fig. 2 fig. 3

- Moyen pour rendre visible la figure ou une sous figure pertinente pour la résolution

Un dessin est donné de façon à ce que l'appréhension perceptive ne soit pas un obstacle pour la résolution de problème. Et plus précisément, le dessin est supposé faciliter, chez l'élève, l'extraction de sous-figures pertinentes pour la résolution de problème.

Considérons l'exercice ci-dessous du manuel Terracher (Seconde, 1995, n° 62, p. 298) :

Un triangle ABC, I, J et K les milieux des côtés, un point M quelconque et ses symétriques P, Q et R par rapport à I, J et K : telles sont les données de l'exercice.
Il s'agit alors de montrer que les segments [AP] , [BQ] et [CR] ont le même milieu.

A R K J Q M B I C P

□ Etudier les quadrilatères mis en évidence dans la figure.

"□" est une indication de l'auteur pour les élèves. Elle veut attirer l'attention des élèves sur les sous-figures "parallélogrammes" : AMCQ, MBPC, ARBM. D'autant plus, que dans le manuel les parallélogrammes ont des intérieurs de différentes couleurs.

Cet exercice a été proposé à deux classes de Première[9]. Dans une classe, le dessin et l'indication "□" n'ont pas été donnés. Il a été constaté que tous les élèves ont placé le point M à l'extérieur du triangle ABC[10] (fig. 4), à l'exception d'un élève. Sur 33 élèves de cette classe, un seul a réussi l'exercice, en utilisant l'outil configuration. Dans l'autre

9 Dans un travail de recherche en cours sur les vecteurs dans l'enseignement secondaire, par M. Bittar, équipe EIAH, LEIBNIZ, Grenoble.

10 Cela devrait être prévisible, étant donné qu'un point quelconque n'a pas à être à l'intérieur du triangle.

classe, le dessin et l'indication "□" n'ont pas été donnés, mais l'énoncé précisait que le point M est à l'intérieur du triangle ABC. 15 élèves sur 29 de cette classe ont réussi l'exercice par l'outil configuration.

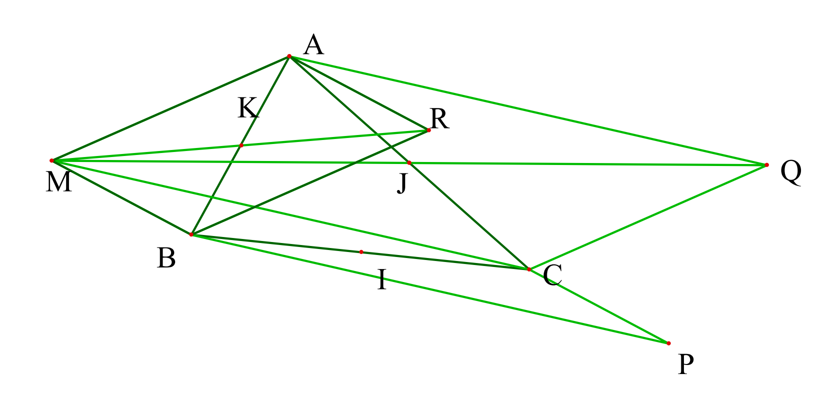


fig. 4

Comme le montre le dessin (fig. 4), lorsque M est à l'extérieur du triangle les trois parallélogrammes AMCQ, MBPC et ARBM se chevauchent. Et donc le dessin ne montre pas ces sous-figures pertinentes pour la résolution du problème. Cela peut expliquer, pourquoi le dessin accompagne l'énoncé dans le manuel "Terracher".

b) Fonctions du dessin dans la résolution

Les travaux précédemment cités ont souligné plus particulièrement le rôle du dessin dans la résolution des problèmes de géométrie plane : le dessin contre-exemple, moyen d'explorer la situation, outil de conjecture ... etc.
Ces fonctions sont spécifiques de la phase heuristique de la résolution de problème. Nous les désignerons sous l'étiquette "fonction d'expérimentation". Nous proposons donc d'expliciter cette fonction à partir des travaux de recherche et des manuels.
Notons qu'il y a une phase préalable à cette phase heuristique de la résolution du problème, où l'élève est invité à faire ou refaire (dans le cas où le dessin accompagne l'énoncé) un dessin. Le dessin a donc la fonction d'illustration.

i) <u>A travers les manuels</u>

Certains manuels expliquent que la résolution du problème commence par un dessin en accordant à cette phase une importance pour la suite. Nous examinons à ce propos un extrait d'un manuel de Seconde (Transmath, 1995, p.231) où l'auteur introduit le chapitre de géométrie par une fiche de conseils pour la démonstration. Il s'agit de la “première étape” de la résolution d'un problème :

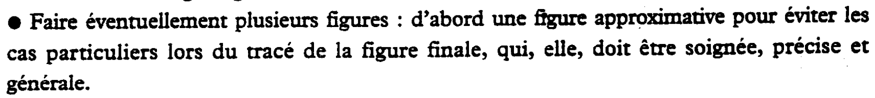
Nous proposons un guide de résolution que nous exposons sur un exemple simple.
Dans un triangle ABC, (Bx) est la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$, M est le milieu de [AB].
La parallèle à (BC) menée par M coupe (Bx) en I.
Démontrez que les droites (AI) et (BI) sont perpendiculaires.

▶ 1 PREMIÈRE ÉTAPE :
faire la figure de manière active et réfléchie

Les conseils qui vont suivre concernant la construction de la figure ne sont sûrement pas nouveaux.

● Faire la figure n'est pas une activité passive.
Le tracé de la figure doit être fait avec réflexion pour :
— bien repérer les données, c'est-à-dire les hypothèses ;
— les traduire plus explicitement.

Par exemple, ici, « (Bx) est la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$ du triangle ABC » se traduit immédiatement par :
« (Bx) est la droite qui passe par B et qui divise l'angle $\widehat{ABC}$ en deux angles égaux ».


● Faire éventuellement plusieurs figures : d'abord une figure approximative pour éviter les cas particuliers lors du tracé de la figure finale, qui, elle, doit être soignée, précise et générale.

Par exemple, ici, si on trace un triangle presque isocèle en B, le point I semble être sur [AC]. Le tracé rapide d'une autre figure où le triangle ABC est "loin" d'être isocèle en B montre que visiblement le point I n'est pas sur [AC].

● Indiquer sur la figure, par l'emploi de signes conventionnels, certains renseignements donnés par l'énoncé.

Par exemple, ici, on fera apparaître sur la figure, par le signe conventionnel d'usage, les hypothèses : M milieu de [AB] ; (Bx) bissectrice de l'angle $\widehat{B}$.

1° étape (Transmath, 1995, p. 231)

Pour la réussite de cette phase, illustration de l'énoncé, il a été conseillé par les auteurs de ce manuel :
- d'éviter les cas particuliers, c'est-à-dire faire un "bon" dessin,
- de traduire toutes les hypothèses soit par des relations spatiales soit en utilisant des marques typographiques. Cette traduction dépend du domaine de fonctionnement du dessin.

Une fois le dessin réalisé, l'élève doit passer à la phase dite heuristique mettant en jeu la fonction d'expérimentation du dessin. C'est la deuxième étape proposée par les auteurs du manuel "Transmath" :

►2 DEUXIÈME ÉTAPE : examiner la figure, repérer des figures-clés, en tirer des conséquences immédiates

Il ne s'agit pas, dans ce travail, d'expliciter toutes les conséquences des hypothèses.
Mais il s'agit, sans se préoccuper encore de la conclusion, de se livrer à un travail préparatoire indispensable. Essayons de repérer quelques figures-clés.
Elles pourront faire penser à l'utilisation de tel ou tel théorème.

Transmath, 1995, p. 232

Les "figures-clés" qui "font penser" à un théorème sont désignées dans des manuels par "configurations". Cette notion de configuration est utilisée pour désigner le couple (dessin, propriété) où le dessin est une illustration de cette propriété. Ainsi, on parle de configuration de Thalès pour désigner le dessin ci-dessous.

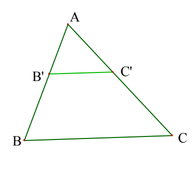


fig. 5

De même des configurations sont associées à des transformations (translation avec parallélogramme, quart de tour avec carré, ...)

A. Robert (1995)[11] présente la notion de configuration comme un synonyme de figure lorsque celle-ci est d'usage fréquent. Parmi ces configurations, certaines sont désignées par "configurations de bases", dont le rôle dans la résolution de problème, est souligné par A. Robert (1995, p. 26) :

> “De plus, certaines configurations très fréquentes et ayant des propriétés remarquables sont quelquefois appelées "configurations de base" pour souligner l'importance de les reconnaître dans des figures plus compliquées, les propriétés devant leur être "automatiquement" associées.”

Dans le livre du professeur (Terracher seconde, 1994, p.90), l'auteur précise le sens qu'il accorde à l'expression "configurations" et leur importance dans la résolution de problème :

11 Il s'agit d'un ouvrage destiné à la préparation du CAPES externe de mathématiques.

> “ Mais précisons le sens que nous accordons à l'expression « *configurations* », au moins dans ce chapitre[12] (le mot, on le sait, est à signification variable). Ce sont des couples (figure, information) ...
> Cet aspect nous paraît capital. L'absence d'une telle vision condamne d'avance l'utilisation des configurations dans la résolution de problème ... qui reste l'objectif majeur de ce chapitre.
> Signalons que nous maintiendrons ce point de vue lorsque l'information sera issue du domaine vectoriel ou de celui des transformations.”

Le rôle et la place de la notion de configuration dans les manuels montrent l'intérêt porté par les auteurs au rôle du dessin dans la phase heuristique des problèmes de géométrie plane. C'est ce que nous proposons d'examiner dans ce qui suit à partir du manuel "Terracher" (Seconde, 1994).

Dans ce manuel, Terracher (Seconde, 1994, p.216), l'auteur précise le rôle de la notion de configuration dans la résolution de problème :

> “ Initier à (ou approfondir) l'emploi de l'**outil configurations** dans la résolution de problèmes de géométrie. Il s'agit de la démarche qui consiste, dans une situation donnée, à **reconnaître une configuration de base** pour mobiliser, en vue de la solution, *les résultats qui lui sont associés* (cet aspect des affaires est pris en charge dans les Travaux Pratiques et, bien sûr, dans les exercices).”

Dans la partie "Travaux Pratiques", cet auteur présente des activités sur le thème : “l'exploration des types de problèmes de géométrie pour lesquels l'outil de configuration reste efficace.”(Terracher 2°, p.228). Des exercices[13] sont résolus par l'auteur, dégageant la partie où la figure joue le rôle d'un outil heuristique et la partie présentant la solution du problème. Ces exercices montrent respectivement :
- que le dessin permet de conjecturer et ceci par une lecture des relations spatiales sur le dessin, la construction point par point pour les lieux géométriques ... etc.,
- comment peut être dégagée du dessin “une idée” de la solution,
- que le dessin est objet d'étude pour les problèmes de construction. L'auteur explicite dans "point méthode"[14] que “la recherche de tels problèmes s'engage toujours par une **figure d'étude** qui n'est autre que la figure que l'on veut réaliser.” (Terracher 2°, p.230).

---

12 Chapitre "Configurations"

13 Exercice résolu 1 et exercice résolu 2 du TP (C), Terracher seconde, p.228.
Exercice résolu 1 et exercice résolu 2 du TP (D), Terracher seconde, p.230, 231.

14 "Point méthode" étiquètent des rubriques où l'auteur présente des méthodes et des commentaires surt la résolution de problème.

Toujours dans une rubrique "Point méthode"[15], Terracher résume les propriétés qui interviennent dans les problèmes de parallélisme et d'orthogonalité. A cela il ajoute l'importance des figures dans la résolution des problèmes :

> “Voilà pour la «caisse à outils» : *connaître son contenu est indispensable pour résoudre des problèmes.* Mais cela ne suffit pas ! Car il ne se passera rien si l'on examine la figure d'un problème sans idées derrière la tête; il nous faut essayer de repérer une (éventuellement plusieurs) **figure-clé, c'est le seul moyen de faire intervenir un théorème, une propriété, etc., un outil** (sauf peut-être un jour de chance).

ii) <u>A partir de travaux de recherche</u>

En examinant la question de la construction du savoir mathématique, Chevallard (1991, p.56) parle de "l'expérience graphique" comme moyen d'expérimentation en géométrie.

> “sur la base du savoir géométrique organisé, l'exploration d'un domaine de phénomènes géométriques conduit à formuler des conjectures, qui fournissent autant et plus de problèmes de géométrie, qu'il s'agit de résoudre ...
> Comment se fait classiquement cette phase de travail que nous avons appelée l'exploration de phénomènes ? Il s'agit avant tout d'une phase *expérimentale*[16], qui met en rapport la théorie avec l'espace sensible, par le biais d'un montage expérimental. En géométrie, le montage est réalisé avec des moyens qui sont demeurés essentiellement inchangés sur plusieurs millénaires. L'expérience est ici une expérience graphique, qui suppose seulement un support et des instruments de tracé.”

Ainsi, lors de la résolution d'un problème de géométrie, l'élève est souvent invité à faire un dessin, traduisant les données du problème, et ensuite à l'utiliser comme terrain d'expérimentation. Cette double fonction du dessin dans la résolution du problème de géométrie plane a été soulignée par Bkouche (1983, p.16).

> “La géométrie plane est ainsi lecture de situations planes, ce sont les situations planes représentées par les figures qui sont objets d'étude, et ainsi d'accès direct : on *voit* les figures planes et c'est sur elles que se constitue le raisonnement pour y découvrir à partir des évidences initiales des propriétés plus complexes;”

On peut noter deux types de difficultés : la première concerne le traitement de la figure[17]. En effet, une fois que le dessin est réalisé, l'élève est invité à dégager des

---

15 p. 229
16 C'est nous qui soulignons
17 A ce propos nous renvoyons aux travaux de Duval (cf. 5.1.1, p.28)

éléments pertinents pour le problème et ceci nécessite un traitement spécifique : mesurer, réaliser des tracés auxiliaires, examiner des cas particuliers, vérifier certaines propriétés spatiales, modifier la figure par des transformations, repérer des configurations usuelles ... etc.
Ce traitement de figure correspond à ce que Duval désigne par "appréhension opératoire de la figure".
Les caractéristiques de cette appréhension permettent d'apporter des réponses aux deux questions posées par Duval que nous avons citées précédemment (cf. 5.1.1, p.28). Pour la question 1, Duval (1994, p.128) dit que :

> “Pour un problème déterminé, et pour une figure de départ, celle donnée avec l'énoncé du problème ou construite à partir de l'énoncé du problème, il y a généralement une des modifications figurales possibles qui montre l'idée de la solution ou de la démonstration. C'est la modification figurale heuristiquement pertinente.”

Et comme le souligne Duval (1994, p.128), cette modification figurale heuristiquement pertinente n'est pas toujours visible de façon immédiate. Le problème est donc posé en termes de visibilité de la figure. D'où des éléments de réponse à la deuxième question de Duval :

> “Pour chacune des modifications figurales possibles, il y a un ensemble de facteurs liés aux significations perceptives de la figure qui en font varier la visibilité dans le sens d'une facilitation ou dans celui d'une inhibition.”[18]

Dans le même sens Padilla (1990, p. 224) étudie le "rôle intuitif" des figures géométriques :

> “L'intuition que donne une figure géométrique ne relève pas seulement des lois gestaltistes de la perception. Elle dépend aussi d'autres types d'appréhensions comme l'appréhension opératoire ou l'appréhension discursive (Duval, 1988)...
> Dans le cas de cette appréhension opératoire, le rôle intuitif d'une figure géométrique dépend de plusieurs facteurs :
> - le fait que le regroupement pertinent des parties élémentaires forme une reconfiguration qui est convexe ou non convexe
> - le fait que le fractionnement de la figure en parties élémentaires soit donné au départ où qu'il doive être trouvé
> - le fait qu'une même partie élémentaire doive entrer simultanément dans deux regroupement intermédiaires à comparer (Duval, 1988, page 66, 67).
> Ces facteurs permettent d'évaluer le rôle intuitif d'une figure et d'analyser le type de difficultés qu'elle peut présenter.”

18 ibid.

Padilla présente aux élèves de 6ème et 5ème, six problèmes dont les figures exigent l'opération de reconfiguration intermédiaire[19] (partage d'une figure en sous-figures pouvant être recombinées en une autre figure). Les résultats montrent une différence entre les élèves de 6ème et 5ème quant au type d'appréhension. Plus précisément, les élèves de 6ème utilisent leur perception de façon spontanée plus que les élèves de la classe de 5ème. Ce travail a montré également une différence entre le temps du traitement des problèmes (Padilla, 1990, p. 252) :

> “Il est remarquable, que même les figures les plus simples, ..., ne sont pas si évidentes pour les élèves de cette tranche d'âge, et prennent des TT[20] qui peuvent aller de 1' jusqu'à 20' pour trouver la solution. Cette différence entre les temps de traitement est liée à l'opération qui a constitué la productivité heuristique de chaque problème.”

Enfin, l'auteur conclut que “ "voir" sur une figure est une démarche complexe et qui relève d'un apprentissage qui ne doit pas rester ignoré” (Padilla, 1990, p. 252).

La deuxième difficulté est de savoir interpréter chacune des informations du dessin en distinguant celles qui sont interprétables en termes de propriétés géométriques. C'est le domaine d'interprétation associé au dessin.

c) Fonctions du dessin dans la solution proposée par l'élève

Nous examinons les fonctions du dessin dans la partie que l'élève considère comme solution au problème et qu'il rend publique. Nous distinguons trois fonctions du dessin :
- illustrer les étapes : sur le dessin, l'élève réalise les tracés auxiliaires, laisse des marques de compas, pour indiquer comment il a construit la médiatrice par exemple, met des mesures des côtés, colorie des parties de la figure pour les rendre visibles, ...
- réponse au problème : pour certains types de problèmes, l'enjeu est la réalisation d'un tracé. Dans ce cas, le dessin fourni fait partie de la réponse au problème.

5.1.3. Conclusion

Nous avons distingué trois niveaux d'intervention du dessin dans les problèmes de géométrie plane : énoncé, résolution et solution. A chaque niveau, le dessin peut avoir une ou plusieurs fonctions.

---

19 Il s'agit des modifications méréologiques (cf. 5.1.1, p.28).
20 Selon la terminologie de l'auteur, TT désigne le temps du traitement.

Le dessin peut avoir la fonction d'illustration au niveau de l'énoncé, s'il est donné par l'enseignant ou le manuel, au niveau de la résolution ou à celui de la solution. Dans ces derniers cas, c'est l'élève qui doit le réaliser. Cette fonction d'illustration dépend essentiellement du domaine de fonctionnement du dessin.
La fonction de "prise en charge des hypothèses" dépend de l'usage des marques typographiques utilisées dans l'institution "classe de mathématique".

Pour notre étude, nous nous intéressons aux fonctions du dessin dans la phase de résolution de problème, et plus particulièrement à la fonction d'expérimentation.
Lors de la résolution du problème, l'élève est invité à faire ou refaire le dessin pour illustrer l'énoncé. Cette fonction d'illustration dépend du domaine de fonctionnement. C'est à partir de ce dessin que le "travail expérimental" peut se mettre en place : exploration, conjectures, construction d'objets intermédiaires ...Cette phase heuristique se fait avec un aller-retour entre les connaissances géométriques et les propriétés spatiales du dessin, ce qui dépend du domaine d'interprétation associé au dessin.
La fonction d'expérimentation est conditionnée par les deux domaines associés au dessin, domaine de fonctionnement et domaine d'interprétation. De plus, le sujet mettra d'autant mieux en oeuvre cette fonction du dessin qu'il a la possibilité d'appréhender et d'interpréter le dessin.

5.2. Le dessin en géométrie dans l'espace

Si en géométrie plane, le dessin intervient à trois niveaux et avec différentes fonctions, on peut se demander ce qu'il en est en géométrie dans l'espace. Cette interrogation nous a conduit à examiner tout d'abord les problèmes de représentation des objets de l'espace. En effet, la représentation des objets géométriques de l'espace, de dimension trois, par des dessins sur une feuille de papier, de dimension deux, se fait par une ou plusieurs projections. De ce fait, dans le cas d'une seule projection, il y a forcément perte d'informations. D'où la nécessité de faire appel à des codes pour la lecture et l'écriture de ces représentations, comme le souligne Bkouche (1983, p.16)

> “Une situation spatiale apparaît ainsi à travers une représentation qui la transforme en figure plane, ceci nécessite l'explicitation d'un code, code d'écriture et code de lecture... Dans ces conditions, l'appréhension de la situation spatiale à travers la médiation de la représentation plane ne s'appuie plus sur l'évidence comme c'est le cas en géométrie plane, on ne peut plus raisonner sur une figure qui est déjà distincte de la *réalité* qu'elle est censée représenter, ceci nécessite donc la mise au point de méthodes de raisonnement plus complexes ...”

Ainsi, la problématique du dessin en géométrie dans l'espace, dans l'enseignement, se trouve liée au choix du mode de représentation des objets de l'espace.
Si on se place dans la problématique de l'enseignement secondaire de la géométrie dans l'espace en France, le mode de représentation choisi est la perspective parallèle.
Parzysz (1991, p.219) avance l'hypothèse que la raison du choix de la perspective parallèle tient probablement à un souci d'équilibre entre le voir et le savoir.

> "La raison de ce choix pour les dessins de géométrie, outre la facilité d'exécution, doit être cherchée dans le fait que la perspective parallèle réalise un compromis acceptable entre le voir et le savoir (transfert de propriétés)"

En effet, parmi les différentes représentations planes d'objets de l'espace, la perspective parallèle est celle qui permet "le plus" de conserver des propriétés (parallélisme, milieux, rapports des mesures de segments parallèles) tout en offrant de l'objet une image "voisine" de celle qu'il présente à la vue.

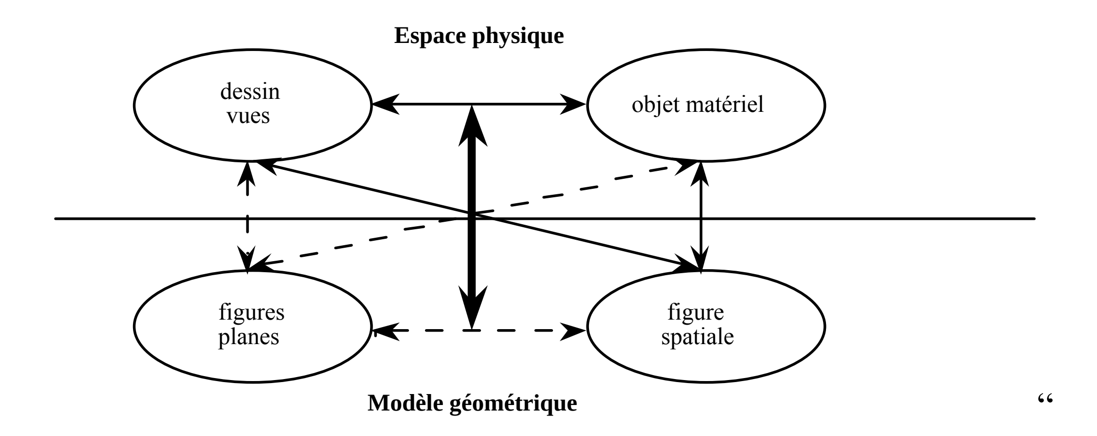
Compte tenu de ce mode de représentation adopté, nous nous proposons d'examiner dans quelle mesure le dessin, en perspective parallèle, peut avoir différentes fonctions, comme en géométrie plane, dans les problèmes de géométrie dans l'espace.
Pour examiner le cas de la fonction d'illustration, nous étudierons comment on peut passer de l'objet géométrique au dessin. Elle correspond à la phase où le sujet réalise un dessin pour traduire les données du problème. Cette fonction dépend du domaine de fonctionnement du dessin en tant que modèle d'un objet géométrique.
Pour examiner le cas de la fonction d'expérimentation, nous étudierons comment l'on passe du dessin à l'objet géométrique : au cours du traitement du dessin, on doit interpréter des propriétés dans le domaine géométrique. Cette fonction dépend en partie du domaine d'interprétation du dessin en tant que modèle d'un objet géométrique.

Dans cette mise en relation d'un objet géométrique de l'espace avec un dessin le représentant, un autre objet intervient : un objet géométrique plan projection sur un plan de l'objet géométrique de l'espace. A ce propos, Bessot et al. (1993, p.123) présentent un schéma des mises en relation établies par une modélisation géométrique des objets physiques.

> “Cette démarche suppose une modélisation géométrique des objets matériels et des relations entre ces objets. Nous donnons brièvement des éléments de cette modélisation.
> Un objet matériel peut être associé, dans une géométrie à trois dimensions, à une figure spatiale ou à des figures planes. Dans le modèle géométrique, figure spatiale (objet géométrique composé d’arêtes rectilignes, de faces planes

polygonales, de surfaces cylindriques ou sphériques) et figures planes se correspondent par projections orthogonales, à une similitude près. Le dessin (vue ou système de vues) est un tracé matériel de cette ou ces figures: en opposition avec les dessins intervenant dans la géométrie élémentaire, *ce dessin est une épure au sens où les mesures jouent un rôle central* (pour la distinction dessin-figure voir Parzysz, 1988). De ce point de vue, la notion de projection orthogonale modélise les relations entre objet matériel et dessin (vue ou système de vues).
Le schéma 1, ci-après, montre la complexité des mises en relation établies par cette modélisation.

Schéma 1: relations entre objet matériel, dessin et modèle géométrique



Ce travail porte essentiellement sur la lecture des graphismes techniques où le dessin est un système de vues et les objets géométriques sont des solides géométriques. Cependant, ce schéma reste valable au delà du contexte dans lequel il a été produit. Nous considérons donc le schéma suivant :

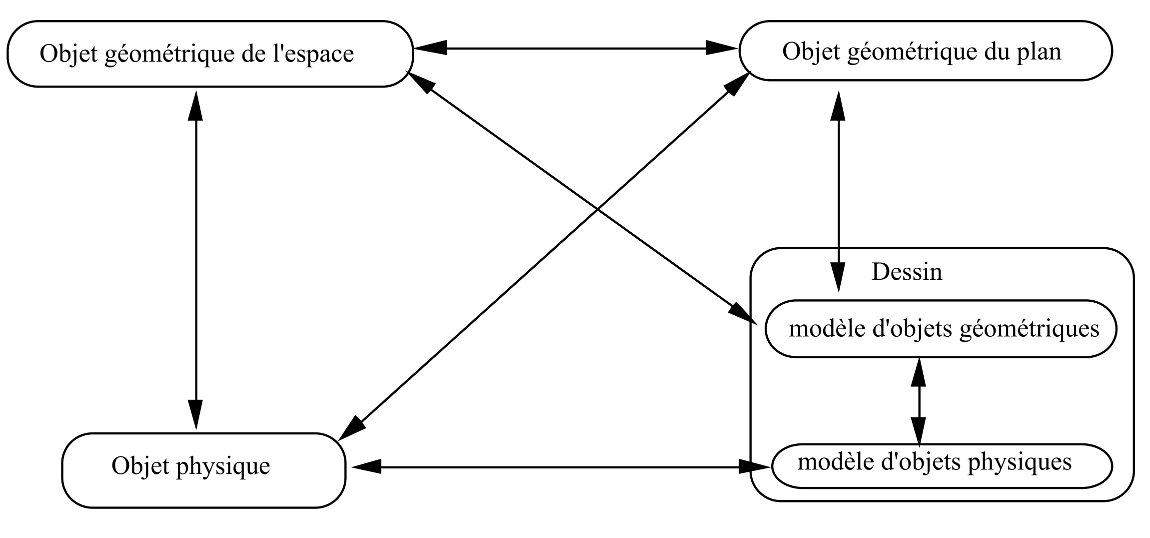


Schéma 2

Selon la problématique étudiée, on peut considérer un ou plusieurs sous-schémas du Schéma 2. Pour notre cas d'étude, nous nous intéressons aux passages entre un objet géométrique de l'espace et un dessin représentation de cet objet en perspective cavalière.
A un objet géométrique de l'espace, on associe un objet géométrique du plan par une projection sur un plan. A ce dernier, on associe un dessin comme représentation matérielle. Pour la suite nous considérons le schéma suivant :

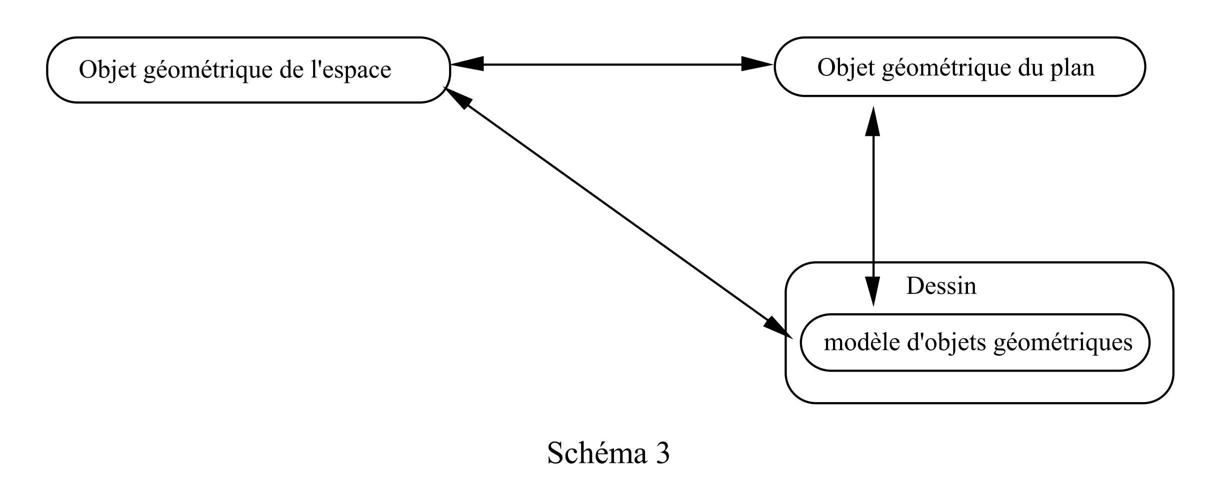
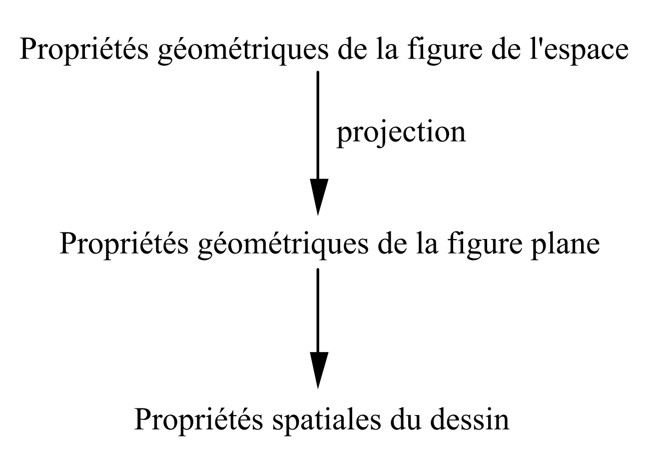


Schéma 3

5.2.1. Passage de l'objet géométrique au dessin

Le passage d'un objet géométrique de l'espace à un dessin qui le représente se fait à l'aide d'une traduction de certaines propriétés géométriques de l'objet en des relations spatiales sur le dessin. En fait, ces relations spatiales sont des traductions des propriétés géométriques de l'objet plan, projeté de l'objet de l'espace. Ces propriétés constituent le domaine de fonctionnement du dessin.



Examinons d'abord les propriétés géométriques[21] qui sont conservées par la perspective cavalière. Il s'agit de la conservation du parallélisme, de l'alignement, des barycentres et rapports de longueurs.

Propriétés géométriques de la figure de l'espace	**Propriétés géométriques de la figure plane**	**Propriétés spatiales du dessin**
Droites parallèles	Droites parallèles	Segments parallèles
Droites sécantes	Droites sécantes	Segments sécants
Points alignés	Points alignés	Points alignés
Barycentre	Barycentres	Barycentres
Rapports des longueurs	Rapports des longueurs	Rapports de longueurs

Ainsi, si on se limite aux règles de la perspective cavalière, le domaine de fonctionnement du dessin est très réduit[22].
En plus de ces règles, des conventions et des représentations-types sont utilisées dans l'enseignement permettant ainsi d'élargir le domaine de fonctionnement du dessin. C'est ce que nous proposons d'examiner dans le prochain paragraphe.

5.2.2. Conventions et représentations-types

Dans l'enseignement on fait appel d'une part à des conventions[23], d'autre part à des représentations-types que nous définissons par :

Une représentation-type est un dessin dont l'objet est d'illustrer une ou des relations géométriques entre les objets géométriques de l'espace. Elle n'a pas fait l'objet d'une convention explicite. Cependant, elle fait partie d'une tradition d'enseignement.

Nous distinguons une représentation-type d'une représentation-prototype. La deuxième renvoie aux dessins typiques au sens de Cordier (1991, p. 47)

> “La typicalité est une propriété des éléments d'une catégorie qui correspond à l'idée que certains éléments (sous-catégories, exemplaires) constituent des meilleurs exemples que d'autres de leur catégorie.”

ou encore aux dessins prototypiques au sens de Noirfalise (1991)

21 On s'intéresse à des propriétés affines
22 En comparaison avec le cas de la géométrie plane.
23 Pour plus de détails, voir Parzysz, 1989, où est présentée une analyse détaillée des conventions utilisées dans les manuels au cours de ce siècle.

> “nous avons tenté d'illustrer l'existence de formes organisées, désignées en l'occurrence par le terme de formes prototypes. Mobilisées rapidement lors de la lecture ou de l'écoute de la consigne, ces formes servent de patrons de comparaison et orientent la saisie des indices.”

Un exemple de dessin prototypique est donné par Laborde et Capponi (1994) : un parallélogramme prototypique a sa diagonale perpendiculaire à un côté du parallélogramme.

L'objet de ce paragraphe est de donner les conventions et les représentations-types qui sont principalement utilisées dans l'enseignement actuel afin d'étudier dans quelle mesure elles permettent d'élargir le domaine de fonctionnement d'un dessin.
Cette étude a été faite à partir des manuels les plus utilisés dans l'enseignement actuel[24].
Dans les paragraphes i et ii, nous examinerons les conventions et représentation-type relevées dans ces manuels. Ensuite, dans le paragraphe iii, nous examinerons celles qui sont explicitées dans les manuels sous forme d'énoncés ou de commentaires.

a) Conventions et représentations-types utilisées dans les manuels

i) Représentation d'un plan

Convention P : on représente un plan P par un parallélogramme.

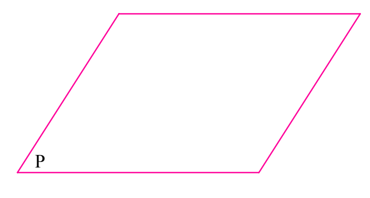


fig. 6

ii) Représentation d'objets cachés

Convention OC : On représente les parties cachées ou non visibles par des pointillés.

iii) Représentations-types relevées dans les manuels

a. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Représentation-type DP : on représente une droite incluse dans un plan, par un segment à l'intérieur du parallélogramme.

---

24 Il s'agit de : Dimathème seconde, 1990. Terracher Seconde, 1994. Transmath Seconde 1995.

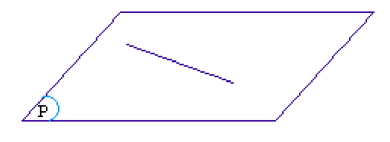


fig. 7

Représentation-type DPp : on représente une droite D parallèle à un plan P par : un segment, représentant une droite D' de P, à l'intérieur du parallélogramme, et un segment représentant D comme une droite parallèle à D', à l'extérieur du parallélogramme.

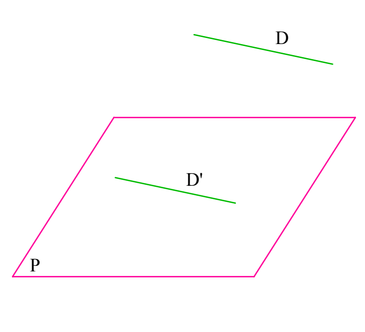


fig. 8

Représentation-type DPs : pour représenter une droite sécante avec un plan, on rend visible le point d'intersection à l'intérieur du parallélogramme. Pour cela on représente par des pointillés une partie de la droite qui est supposée être cachée



fig. 5 fig. 6

Une contrainte de cette représentation-type est que le point d'intersection doit être à l'intérieur du parallélogramme ou à l'intérieur d'une région délimitée par un parallélogramme incomplet Pour ce dernier cas, le point est souvent à l'intérieur du triangle défini par les deux côtés qui délimitent le plan.

b. Positions relatives de deux plans

Représentation-type PPs : pour représenter deux plans sécants, on rend visible leur droite d'intersection à l'intérieur du parallélogramme.
De plus, il y a parallélisme de certains "bords" avec la droite d'intersection.

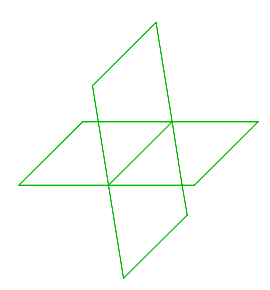


fig. 9

Représentation-type PPp : deux plans parallèles sont représentés par deux parallélogrammes dont les côtés sont parallèles deux à deux.

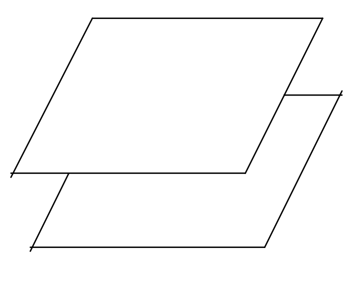


fig. 10

b) Règles, conventions et représentations-types explicitées dans les manuels

Les représentations-types sont utilisées par les trois manuels étudiés pour illustrer les propriétés du cours de façon implicite. Elles permettent de traduire des propriétés géométriques.

i) Terracher Seconde, 1990
Aucune convention n'est explicitée. Seules quelques règles de représentation en perspective cavalière sont illustrées avec un pavé droit.

ii) Dimathème seconde, 1990
Un paragraphe au début du chapitre "Droites et plans de l'espace" (p.353), intitulé "conventions de représentation", présente ce que les auteurs désignent comme étant des "conventions" utilisées dans la représentation d'une figure de l'espace. Elles sont

illustrées par la représentation d'un cube et d'un dessin représentant une droite sécante avec un plan. Pour les auteurs ces conventions sont :

> "- Représentation d'un cube ...
> - Un plan est représenté par une portion de ce plan, en général un rectangle, dont la vue en perspective est un parallélogramme ...
> - Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles ...
> - Les segments cachés sont représentés en pointillés.
> - Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.
> Ces conventions sont celles de la perspective cavalière." (Dimathème, 1990, p 353)

iii) Transmath seconde, 1990

Deux conventions sont explicitées :

> "Première convention : les arêtes visibles sont dessinées en traits pleins; les autres sont dessinées en pointillés.
> Seconde convention : deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles." (Transmath, 1995, p198)

Aucune autre règle ou convention n'est présentée.

c) Conclusion

Dans les manuels Dimathème et Transmath de Seconde nous avons constaté une confusion entre conventions et règles de la perspective cavalière. De plus, seulement quelques règles ou conventions sont explicitées. Selon le manuel, les conventions ou règles explicitées varient. Cependant, tous les manuels font usage des conventions et représentations-types. Ces dernières permettent d'illustrer les propriétés d'incidence dans l'espace.

Les conventions de représentation et les représentations-types permettent d'élargir le domaine de fonctionnement du dessin en tant que modèle d'un objet géométrique de l'espace.

5.2.3. Passage du dessin à l'objet géométrique

Nous nous intéressons aux propriétés ou aux relations géométriques qui peuvent être induites à partir de la lecture d'un dessin représentant un objet géométrique en perspective cavalière. Nous savons que le dessin seul ne peut rendre compte de la situation. Néanmoins, si on utilise le dessin comme terrain d'expérimentation lors de la résolution d'un problème, alors le problème de l'interprétation des propriétés spatiales comme étant des propriétés géométriques se pose, comme nous l'avons dit plus haut.

Or, le domaine d'interprétation d'un dessin, en géométrie dans l'espace, est très réduit et fonctionne selon une logique différente de celle utilisée pour interpréter un dessin de la géométrie plane. En effet, en tenant compte des règles de la perspective, nous retenons :
- Si deux segments, représentations de deux droites, sont sécants, alors les droites ne sont pas parallèles.
- Si trois points, représentants trois points A, B et C de l'espace, ne sont pas alignés sur le dessin , alors les points A, B et C ne sont pas alignés.
- Si un point A', représentant un point A, n'est pas barycentre d'un système de points (A_i',a_i), représentants des points (A_i,a_i) de l'espace, alors A n'est pas barycentre du système (A_i,a_i). Par exemple, si un point est à l'extérieur d'un triangle représentant une face d'un solide, on peut déduire qu'il n'appartient pas à cette face.

6. OBJET DE NOTRE RECHERCHE

L'étude précédente a montré la complexité de la place du dessin dans l'enseignement. En géométrie plane, son statut évolue au cours de l'enseignement primaire et secondaire, du dessin "objet physique" au dessin "modèle d'un objet géométrique". En revanche, dans le cas de la géométrie dans l'espace, il est d'abord modèle d'un objet physique pour être ensuite modèle d'un objet géométrique. Ainsi, dans l'enseignement, on commence par faire manipuler des solides dans le monde sensible avant de passer à leur représentation.
L'objet central de notre travail porte sur la place du dessin, en tant que modèle d'un objet géométrique de l'espace, dans les problèmes de géométrie dans l'espace.
A partir de plusieurs travaux nous avons montré l'importance de la fonction d'expérimentation que le dessin doit remplir dans la phase de résolution d'un problème en géométrie plane. Dans le cadre théorique adopté, deux domaines sont associés au dessin en tant que modèle d'un objet géométrique : domaine de fonctionnement et domaine d'interprétation. La fonction d'expérimentation dépend de ces deux domaines. De plus, à partir de ces travaux, nous avons souligné l'importance de la rétroaction perceptive pour cette fonction d'expérimentation. Ceci nous a conduit à fonder notre étude sur les hypothèses de travail suivantes :

Hypothèse "fonction d'expérimentation" 1

L'importance de la fonction d'expérimentation d'un dessin dans la phase de résolution d'un problème est conditionnée par deux domaines associés au dessin, domaine de fonctionnement et domaine d'interprétation.

Hypothèse "fonction d'expérimentation" 2

Le sujet mettra d'autant mieux en oeuvre la fonction d'expérimentation du dessin qu'il a la possibilité d'appréhender et d'interpréter le dessin.

Sur papier-crayon cette fonction d'expérimentation est limitée pour des raisons matérielles liées au milieu. B. Capponi et C. Laborde (1994) en ont cité certaines : imprécision du tracé, impossibilité à rendre temporairement invisible une partie du dessin, limitation du nombre d'éléments qu l'on peut gérer. Du fait du caractère statique, il y a des relations spatiales du dessin qui ne sont pas pertinentes pour le problème, alors que d'autres le sont. Et sur le dessin statique il est difficile de les distinguer.

Hypothèse "fonction d'expérimentation" 3

La fonction d'expérimentation du dessin "papier-crayon" est limitée pour des raisons matérielles.

Nous considérons, les trois hypothèses ci-dessus comme hypothèses de travail en ce qui concerne la fonction d'expérimentation du dessin, en tant que modèle d'un objet géométrique, du *plan* ou de *l'espace*.

Certains environnement informatiques, par la gestion du dessin sur l'écran, offrent à celui-ci un domaine de fonctionnement plus important et à disqualifier les interprétations illicites (Laborde et Capponi 1994). C'est le cas de l'environnement informatique Cabri-géomètre[25], qui "permet de créer des réalités spatio-graphiques[26] d'objets géométriques à l'aide de commandes exprimées en termes de primitives géométriques (droite perpendiculaire à, médiatrice de, milieu de, ...). Ces dessins à l'écran de l'ordinateur peuvent être saisis par l'un de leurs éléments que l'on déplace à l'aide de la souris, le dessin se déforme alors en conservant les propriétés géométriques qui ont servi à le construire et celles qui en découlent dans une géométrie *grosso modo* euclidienne." (Laborde et Capponi, 1995, p.265). Ces caractéristiques de l'environnement Cabri-gémètre, permettent d'élargir le champ d'expérimentation du dessin. D'où notre hypothèse de travail :

25 Pour une description complète : cf. Baulac, Bellemain et Laborde 1988, Bellemain et Capponi 1992.
26 "dessins produits par la trace du plomb sur le papier, d'un bâton sur le sable, d'électrons sur l'écran de l'ordinateur" (Laborde et Cappponi, 1995, p. 265)

Hypothèse de travail : "dessin - environnement informatique"

Sous certains critères, l'environnement informatique peut élargir le champ d'expérimentation du dessin modèle d'un objet géométrique plan.

En géométrie plane, des tâches et des situations sont proposées afin de donner de l'importance à la fonction d'expérimentation dans la recherche heuristique de la solution d'un problème. D'où, la question :

La fonction d'expérimentation peut-elle être remplie dans un dessin papier-crayon, modèle d'un objet géométrique de l'espace ?

Nous avons montré dans les paragraphes (5.2.1, p.44) et (5.2.3, p.50) deux résultats quant aux domaines d'interprétation et de fonctionnement d'un dessin, modèle d'un objet géométrique de l'espace :

Conclusion 1

Le domaine d'interprétation d'un dessin, modèle d'un objet géométrique de l'espace, est très réduit et fonctionne selon des règles différentes de celui du dessin, modèle d'un objet géométrique du plan.

Conclusion 2

Les conventions de la perspective cavalière et les représentations-types utilisées dans l'enseignement permettent d'élargir le domaine de fonctionnement du dessin. Cela donne au dessin la possibilité de remplir sa fonction d'illustration.

Nous avons montré l'intérêt des conventions et représentations-types. Mais leur emploi n'est pas neutre. En effet, nous faisons l'hypothèse qu'il peut avoir des conséquences sur les conceptions des élèves, ces derniers pouvant développer des interprétations illicites. Nous proposons un dispositif expérimental dans le chapitre B, pour mettre à l'épreuve l'hypothèse de recherche :

Hypothèse de recherche : "Convention"

Les conventions de représentation de la perspective cavalière deviennent des règles d'interprétation d'un dessin chez les élèves.

Cette hypothèse, les conclusions 1 et 2 et les hypothèses sur la fonction d'expérimentation décrite ci-dessus nous permettent de répondre à la question sur la possibilité qu'à la fonction d'expérimentation d'être remplie dans le dessin en géométrie dans l'espace.

Conclusion 3

A priori la fonction d'expérimentation du dessin papier-crayon ne peut pas être remplie, au même titre que dans le plan, en tant que modèle du domaine de réalité "géométrie dans l'espace".

Ceci nous conduit à nous interroger sur :
- les fonctions du dessin dans les problèmes de géométrie dans l'espace, d'autant plus que le dessin a pris une place importante dans l'enseignement depuis la fin de la réforme des "mathématiques modernes".
- le rôle que peuvent jouer les environnements informatiques quant aux fonctions du dessin modèle d'un objet géométrique dans l'espace.

Par ce travail, nous proposons de mettre à l'épreuve l'hypothèse de recherche suivante :

Hypothèse de recherche : "fonctions du dessin comme contraintes"

Après la fin de la réforme des mathématiques modernes, le dessin, par ses nouvelles fonctions dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace, est une contrainte sur la vie de certains objets géométriques de l'espace.

Nous avons choisi d'étudier le rôle du dessin à travers la résolution des problèmes de construction dans l'espace. En effet, nous pensons que les problèmes de construction constituent un lieu privilégié où le dessin joue un rôle différent dans le plan et dans l'espace.
Nous reformulons la question du rôle du dessin dans les problèmes de construction dans l'espace en celle de l'étude des conditions du fonctionnement de l'objet "problème de construction dans l'espace" et de ses interrelations avec l'objet "dessin" dans une institution didactique "enseignement secondaire".

6.1. Cadre théorique

Nous nous plaçons dans une perspective écologique dans la mesure où nous nous intéressons aux interrelations possibles entre l'objet "dessin" et l'objet "problème de construction" dans l'institution "enseignement secondaire".
Pour chaque objet de l'institution I, il existe un rapport institutionnel de cette institution à cet objet. Celui-ci " «énonce» en gros ce qui se fait, dans I, «avec» O, comment O y est mis en jeu, ou encore, en termes plus imagés, ce qui est le «destin» de O dans I." (Chevallard, 1989, p.213).

Pour déterminer le rapport institutionnel, on peut procéder à l'analyse des programmes, des manuels et/ou d'une réalisation effective dans une classe. Cette dernière est soumise à d'autres contraintes relatives au fonctionnement interne d'une classe.
Dans les programmes, l'institution définit les objets à enseigner, ses attentes en termes d'exigences et de recommandations, les finalités et les enjeux de l'enseignement. Seulement, le rapport institutionnel à un objet ne peut pas être complètement défini dans les programmes. Menssouri (1994, p.44) en avance deux raisons:

> “La première est que les programmes ne constituent pas un texte de savoir, mais seulement un discours sur un hypothétique texte de savoir....
> La deuxième raison est que, même en disposant d'un certain texte de savoir, toutes les pratiques à propos des objets de savoir figurant dans ce texte ne peuvent pas être citées.”

L'analyse des manuels est nécessaire, et complémentaire de l'analyse des programmes, pour accéder au rapport institutionnel à un objet O. En particulier, lorsque l'accès au fonctionnement effectif dans une classe n'est pas nécessaire, pour les raisons du choix d'étude, ou n'est pas accessible, par exemple lors de l'étude d'un rapport institutionnel dans une époque du passé, le manuel peut être considéré comme une réalisation effective assez représentative des réalisations possibles. Assude (1996, p.50) a considéré un manuel comme un texte de savoir, elle a avancé comme hypothèse :

> “Nous supposons que le texte du savoir est assez représentatif d'une « moyenne pondérée à plusieurs contraintes » du rapport institutionnel aux objets de savoir mathématiques présents dans les différents systèmes didactiques qui réalisent effectivement ce texte de savoir.”

C'est la même position qu'avait pris Menssouri (1994, p.46) à propos des manuels :

> “Mais les manuels constituent aussi une réalisation effective et "objectivée" des enseignements donnés en classe. Réalisation soumise au regard et au jugement publics, et qui se veut représentative de la réalité de classe. Cette objectivation réside dans la normalisation des fonctionnements différenciés liés essentiellement à l'intervention du sujet psychologique, toutes les autres contraintes de fonctionnement étant prises en considération. Nous pouvons dire que cette objectivation est une objectivation de l'enseignement par mise à l'écart de l'apprentissage. Les manuels sont ainsi un lieu privilégié où le chercheur peut accéder à un fonctionnement objectivé du savoir dans l'institution didactique.”

Pour notre étude nous prenons comme hypothèse de travail que le rapport institutionnel peut être approché par l'analyse des programmes et des manuels.

Cette approche nous permette alors d'identifier les fonctions des objets "dessin", "problème de construction" et les interrelations possibles entre eux dans l'institution "enseignement secondaire" à un moment donné. Mais, ceci nous ne serions pas renseignés sur d'autres interrelations possibles entre ces objets, ayant pu exister ou pouvant exister, et sous quelles conditions, ou encore sur le pourquoi de ce type d'interrelation. Sur ce point, nous rejoignons Chevallard (1994, p.145), qui affirme que pour chaque question une étude spécifique s'avère nécessaire.

Pour déterminer d'autres interrelations ayant pu exister dans l'institution, on peut examiner le rapport institutionnel de ces objets et de leur interrelation dans l'institution "enseignement secondaire" mais à une autre époque. D'autant plus que, comme nous l'avons vu, le dessin n'a pas la même place dans l'enseignement, avant, pendant et après la réforme des mathématiques modernes. Une étude de la vie de ces objets et de leur interrelation à travers diverses périodes nous semble donc un moyen pertinent pour répondre aux questions "Pourquoi a-t-on ce type d'interrelation ? et y a-t-il d'autres interrelations possibles ?".

Pour cela, nous proposons un modèle à partir duquel nous présenterons notre méthodologie. Ce modèle est une lecture des travaux de Chevallard sur la transposition didactique, simplifiée par rapport aux besoins de notre étude.

6.1.1. Evolution du système d'enseignement

Chevallard (1994, p.141) voit la réforme des mathématiques modernes, comme une "perturbation d'un système en équilibre dynamique". C'est dans cette perspective que nous considérons le système d'enseignement comme un système dynamique dont chaque programme définit un état. C'est un état de référence pour le fonctionnement du système. Pendant la période où le programme ne change pas, on dira que l'état du système est en position E.

Au cours des dernières décennies, le système d'enseignement en France a connu plusieurs états. Une première analyse montre un épisode important dans ces changements de programmes : la réforme des mathématiques modernes. Comme l'explique Chevallard (1991, p.48) cette réforme est un bouleversement du système d'enseignement :

> “A la commotion de la réforme des mathématiques modernes autour des années soixante-dix - l'un des bouleversements les plus radicaux sans doute de l'histoire de l'enseignement des mathématiques - succède aujourd'hui après une période transitoire d'une dizaine d'années, une évolution, plus douce d'apparence, mais qui s'éloigne tout aussi résolument et de l'état antérieur à la Réforme, et de celui que cette dernière eut l'ambition de promouvoir”

Examinons d'abord les différents états du système au cours de ce siècle.

A la lecture des programmes, nous avons distingué deux types de passages entre deux états E_i et E_{i+1}. Soit le programme à l'état E_{i+1} conserve l'essentiel du précédent, dans ce cas on dira qu'il y a une continuité dans le passage entre ces deux états, soit le programme propose un changement par rapport au précédent, non seulement sur le contenu mais aussi sur les lignes directrices, les objectifs généraux etc., dans ce cas on dira qu'il y a une rupture dans le passage entre ces états. Sur une période où les passages entre les états sont en continuité, on dira que le système est en "dynamique continue".

Ainsi, au cours de ce siècle, le système d'enseignement a connu deux ruptures. La première correspond à la réforme des mathématiques modernes de 1969 et la deuxième aux programmes de la fin de cette réforme en 1982[27]. Nous dégageons alors trois périodes où le système d'enseignement est en dynamique continue dans chacune de ces périodes. La première correspond aux programmes qui précèdent la réforme des mathématiques modernes, de 1923 à 1969, on la désigne par "période 1". Ensuite, la période de la réforme des mathématiques modernes, de 1969 à 1982, qu'on désigne par "période 2". Enfin, la période d'après la réforme des mathématiques modernes, de 1982 à nos jours, qu'on désigne par "période 3".

---

27 Cette date correspond à la mise en place des nouveaux programmes de la classe de seconde.

Période 1

Cette période n'a connu que deux programmes, ceux de 1923 et ceux de 1945. Seulement, les programmes de 1945, ne présentent presque aucune modification par rapport aux précédents sur le contenu, sinon quelques réorganisations pour la mise en place de plusieurs sections dans l'enseignement secondaire.

Période 2

La réforme des mathématiques modernes est entrée en vigueur pour les classes de seconde et de sixième en 1969. Pour la classe de seconde, le programme est alors celui d'une transition pour les élèves n'ayant pas eu l'enseignement de la réforme des mathématiques modernes au collège. Il propose des changements profonds sur le contenu, les objectifs, l'organisation de l'enseignement, etc.
En 1973, un nouveau programme de la classe de Seconde est destiné aux élèves ayant eu l'enseignement de la réforme des mathématiques modernes. Il présente une certaine continuité par rapport au précédent.

Période 3

Après la fin de la réforme des mathématiques modernes, les programmes de 1982 présentent une rupture avec cette réforme. En particulier, les Instructions expliquent que les programmes en vigueur luttent contre l'axiomatique et le formalisme de la période précédente. Pour la classe de seconde, une introduction au programme redéfinit les grandes lignes, les nouvelles orientations du programme :

> "Les actuels programmes de mathématiques pour le premier cycle ont entrepris de lutter contre un formalisme qui, maltraitant l'acquis intuitif des élèves, isolerait la démarche pédagogique des réalités de l'expérience et de l'action ...
> Le présent programme est celui d'une classe de Seconde pour tous; il convenait de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures...
> Parce que les sciences expérimentales, la technologie, ont pour base des mesures, la géométrie de seconde est essentiellement métrique; à l'égard de l'espace, parce que nous vivons dans un monde fait de solides, elle comporte après celle de troisième, une étude franchement expérimentale des relations entre droites et plans, de l'orthogonalité, des évaluations de distances et d'angle; tout développement axiomatique à ce propos est exclu." (Arrêté du 26 janvier 1981, publication du CNDP, pp.25-26)

Ensuite, les programmes de 1986, puis ceux de 1990, viennent s'appuyer sur les précédents par rapport aux grandes lignes directrices. Comme on peut noter dans la présentation du programme de la classe de seconde de 1990 :

> " Le programme qui suit conserve, pour l'essentiel, les objectifs et la substance du programme précédent, défini par l'arrêté du 14 mars 1986 et publié au *Bulletin officiel* de l'éducation nationale spéciale n°1 du 5 février 1987." (Arrêté du 25 avril 1990, publié au B.O n° 20 du 17 mai 1990).

Ainsi les programmes de la classe de seconde de 1986 et 1990, sont en continuité avec ceux de 1982, alors que ces derniers sont en rupture avec les programmes qui les précèdent. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de lien entre le programme de la réforme des mathématiques modernes et celui de 1982.
On considère que la dynamique se fait dans le sens d'une stabilité de la vie des objets et des interrelations entre eux dans la période de 1982 à nos jours. Pendant cette période les classes du lycée ont connu quatre programmes : 1982, 1987, 1990 et 1994. Nous proposons d'étudier les passages entre ces différents états du système au cours de cette période.

Une fois le texte du programme publié, les manuels constituent une première mise à l'épreuve de ce programme. En effet, ceux-ci présentent une organisation selon une progression chronologique et une séquentialisation. Les objets, annoncés dans le programme, vont vivre dans les manuels et des interrelations vont s'établir entre les objets, sous plusieurs contraintes, en particulier selon les objectifs, les suggestions et les lignes directrices du programme.
Le fonctionnement du système[28] est évalué par les enseignants, les groupes d'enseignants au sein des IREM, des évaluations du type Evaluation APMEP, etc. Cela permet de voir si la réalisation effective correspond au fonctionnement souhaité par les textes du programme. De là, et par d'autres facteurs extérieurs au système, des réflexions sont menées au sein de la noosphère, sur le fonctionnement et/ou dysfonctionnement du système. Cela conduit à un changement ou une adaptation du programme en vigueur. La noosphère a donc un rôle de régulateur du système, comme l'a souligné Chevallard (1991, p. 46)

> “Un rôle qu'il faut situer bien *en amont* de la stricte rédaction des programmes. C'est la noosphère qui doit en quelque sorte «traiter» les pressions, les exigences qui ont leur origine dans divers groupes sociaux dont nous avons évoqué l'existence. Son rôle essentiel est, à cet égard, une fonction de régulation des

28 à travers les manuels et la réalisation effective dans les classes.

exigences qui s'exercent sur le système d'enseignement. Sans cela, l'acte d'enseignement, en butte à des critiques violentes et incessantes, deviendra quasiment impossible. La noosphère doit permettre notamment de produire des programmes censés mieux satisfaire les contraintes dont elle a à connaître.”

Au cours de la période 3, les changements de programmes ne présentent pas de rupture entre les états E_i , E_{i+1}. Le nouveau programme va d'abord rappeler qu'il "conserve l'essentiel du précédent". Ensuite, il présente le nouveau en le situant par rapport à l'ancien. Nous analysons quelques évolutions possibles entre les deux programmes.

- Dans le cas où le fonctionnement effectif dans les manuels[29] n'était pas conforme au programme à l'état E_i, le nouveau va exprimer des mises en gardes sur ces pratiques non conformes aux objectifs du programme précédent qui restent valables.
Par exemple, dans les programmes de 1986, des consignes sur des pratiques au niveau de l'organisation de l'enseignement sont proposées :

> " g) Pour l'organisation de l'enseignement, il convient d'éviter deux écueils majeurs :
> L'utilisation systématique, pour toutes les notions du programme, d'une présentation centrée sur un exposé synthétique et, en outre, souvent trop ambitieux.
> [...]
> L'abus d'exercices aux objectifs scientifiques et didactiques mal définis.
> La lecture des manuels révèle en particulier une quantité excessive :
> - D'exercices, certes abordables mais qui, coupés de tout leur contexte naturel d'intervention, perdent alors leurs intérêt et se résument à des techniques peu motivantes ;
> - D'exercices dont la place naturelle est à un niveau plus élevé et dont un élève de seconde, même s'il peut les exécuter, ne comprendra pas l'intérêt.
>
> D'une manière générale il convient de proposer des exercices, [...]” (Arrêtés des 14 mars 1986 et 30 juin 1986, publication du CNDP, réédition 1989, p.15)

Comme on peut le constater, cet extrait du programme fait explicitement un procès à des pratiques des manuels de la période 1982-1987.
- Le nouveau programme peut expliciter davantage des objectifs déjà mentionnés dans le programme précédent. Par exemple, le programme de 1986 met davantage l'accent sur l'importance de la résolution de problèmes que le programme précédent.
- L'institution peut estimer que des objectifs du programme précédent sont remplis. Dans ce cas, le nouveau programme mettra moins l'accent sur ces objectifs que le précédent, voire les supprimera (ce cas concerne essentiellement des objectifs de

[29] et dans les classes ...

transition). Par exemple, le programme de 1982 met plus l'accent sur le fait qu'il faut lutter contre le formalisme que celui de 1987.
- Des nouveaux objets vont apparaître et d'autres vont disparaître. La liste des nouveaux objets et des objets condamnés à disparaître ne doit pas être importante pour que les perturbations ne provoquent pas de rupture entre les états.
- Evolution du rapport institutionnel de I à un objet O. Ceci se fait par l'explicitation des nouvelles exigences quant à la vie de cet objet.
- Modification des interrelations entre des objets : des interrelations entre des objets vont s'établir, cesser d'exister ou changer.
Nous résumons l'ensemble des états du système entre 1923 à nos jours dans le schéma ci-dessous.

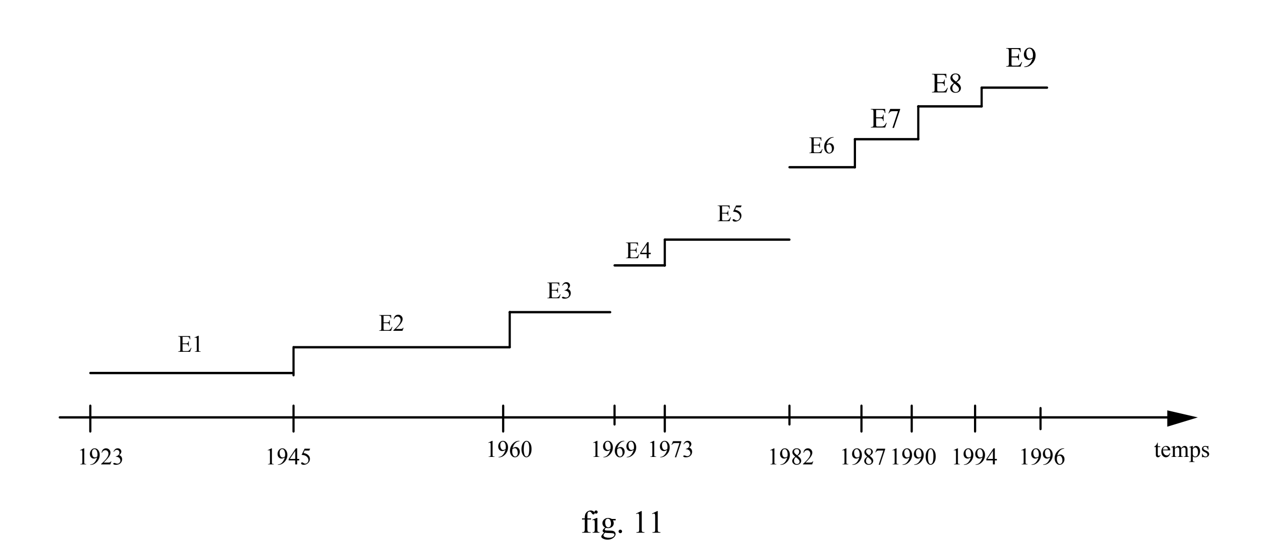


fig. 11

6.1.2. Dynamique de la recherche

Dans ce paragraphe nous rendons compte de la dynamique de la recherche pendant son développement. En effet, l'étude des questions initiales nous a conduit à de nouvelles questions et hypothèses.

Pour la mise à l'épreuve de l'hypothèse de recherche "fonctions du dessin comme contraintes", nous nous proposions d'analyser le rapport institutionnel à l'objet "problème de construction" et son évolution dans le temps par rapport aux fonctions du dessin dans l'institution "enseignement secondaire".

Dans un premier temps nous avons étudié la vie de l'objet "problème de construction" dans les périodes où le système est en "dynamique continue". Ce qui correspond aux trois périodes avant, pendant et après la réforme des mathématiques modernes, que nous

avons nommées respectivement période 1, période 2 et période 3. A cette fin, nous avons procédé à l'analyse des problèmes de construction dans le plan et dans l'espace par rapport à la problématique du dessin, à travers l'étude de manuels et des programmes au cours de ce siècle.

Comme le dessin n'a pas eu un rôle important au cours de la période 2, nous nous sommes limités aux périodes 1 et 3.

Nous cherchions à montrer que le dessin n'avait pas les mêmes fonctions dans la résolution des problèmes de construction dans l'espace au cours des deux périodes 1 et 3. Pour cela, nous avons choisi comme méthode, l'analyse des exercices résolus dans les manuels et des commentaires des auteurs sur les problèmes de construction, leur résolution et éventuellement sur la place du dessin. Cette analyse a été réalisée pour chacune de ces périodes, à des moments où le rapport institutionnel aux objets "problèmes de construction" et "dessin" pourrait être considéré comme stable. Ce travail a constitué l'objet du chapitre C1.

Cette étude a mis en évidence une évolution des problèmes de construction dans l'espace caractérisée par rapport à la place du dessin dans la résolution de certains problèmes, qu'on a désigné par "problèmes de construction évoquée" (PCev) pour la période 1 et "problèmes de construction effective" (PCef) pour la période 3. En d'autres termes, l'objet "problème de construction" vivait différemment, avant et après la réforme des mathématiques modernes. Cela, nous a conduit aux questions suivantes :

Question 1

Quels sont les critères que permettent de caractériser la différence entre les problèmes de construction en géométrie dans l'espace entre les périodes 1 et 3 ?

Question 2

Pourquoi cette évolution ? et plus précisément pourquoi les problèmes de construction dans l'espace sont-ils du type PCef pendant la période 3 et non du type PCev ?

Question 3

Les deux types de problèmes peuvent-ils vivre ensemble dans l'enseignement actuel ?

Nous avons pensé que l'analyse des programmes au cours de la période 3, à différents états, pourrait mettre en évidence des contraintes expliquant l'évolution des problèmes de construction par rapport à la période 1.
Ensuite, une deuxième analyse des manuels permetait d'une part de confirmer ces contraintes et de repérer éventuellement d'autres contraintes et d'autre part d'étudier comment cette évolution a eu lieu.
Ces deux analyses font l'objet du chapitre C2.

La connaissance de ces contraintes et l'analyse comparée des vies, de l'objet "problème de construction dans l'espace", dans les manuels des périodes 1 et 3, ont apporté des éléments de réponses à la "question 3". En fait, cette étude nous a conduit à formuler **l'hypothèse de recherche "papier-crayon"** :

Ces deux types de problèmes ne peuvent pas coexister dans l'environnement papier-crayon, puisque chacun d'eux nécessite un contrat différent par rapport aux productions d'élèves.

C'est du côté du contrat qu'il faut chercher la validation de cette hypothèse, en termes d'attentes des enseignants par rapport aux productions d'élèves relatives aux problèmes de construction évoquées et problème de construction effectives.

Nous avons conçu un dispositif expérimental auprès des enseignants, dans lequel nous tenterons de faire vivre pour des enseignants les deux types de problèmes de construction, effectives et évoquées. Cela, nous a permis de voir, sous la contrainte du rapport personnel à l'objet de savoir "problème de construction dans l'espace", ce que l'enseignant accepte, rejette, exige sur les problèmes et les réponses attendues à ces problèmes de construction effectives et évoquées.
En effet, pour chacune des personnes X de l'institution I (dans notre cas X est un enseignant), l'objet se met à vivre sous la contrainte du rapport institutionnel RI(O). Ainsi, "un rapport personnel R(X,O), va se construire, ou va changer, sous la contrainte RI(O), et plus largement sous la contrainte du contrat institutionnel CI" (Chevallard, 1992, p. 89).
Nous nous sommes placés dans le cas où on peut supposer que le rapport personnel de l'enseignant à l'objet "problème de construction dans l'espace" est construit et stable. Cela exige de travailler avec des enseignants non débutants et ayant enseigné dans les classes de Seconde et / ou de Première S au cours des dernières années. Ce travail fait l'objet du chapitre C3.

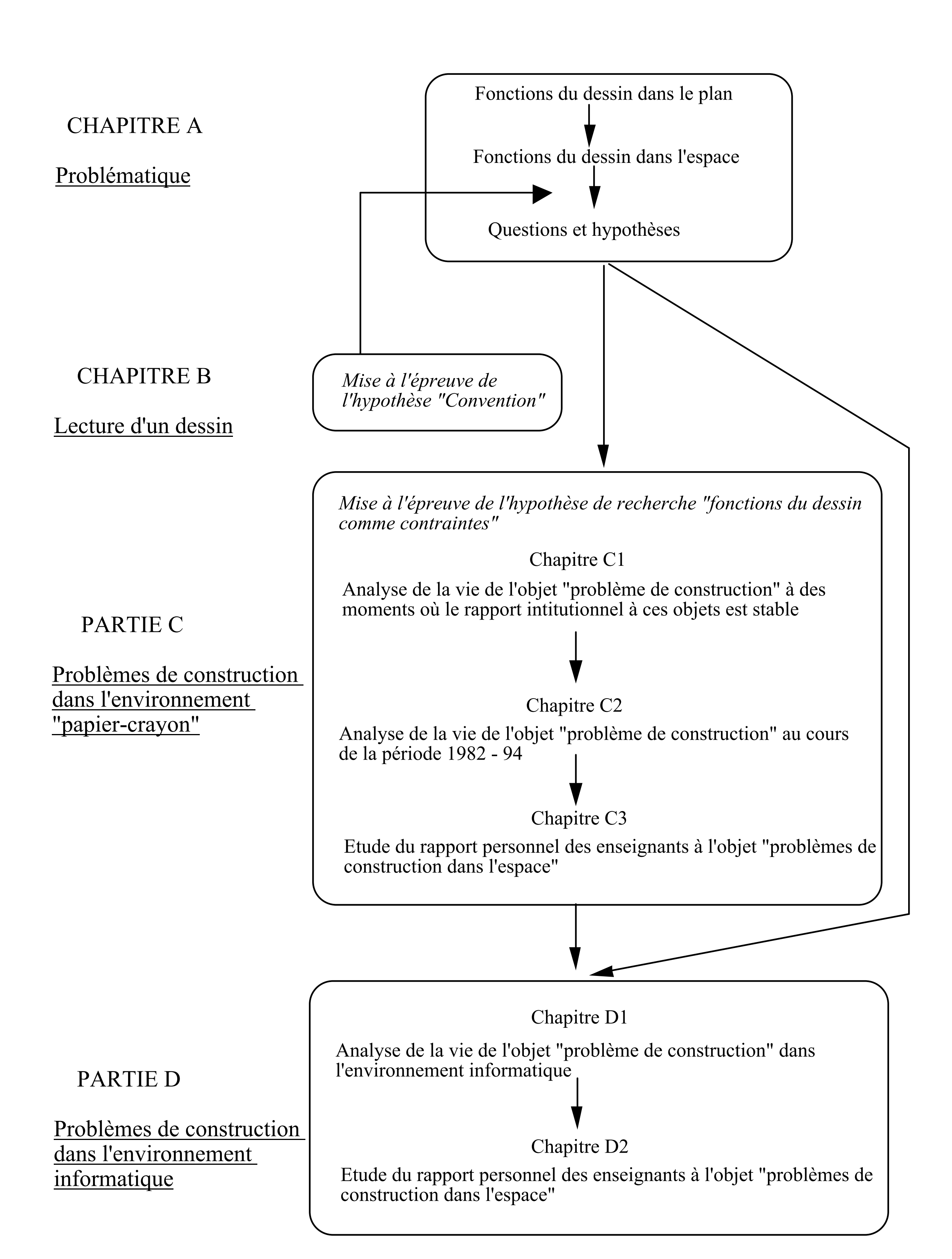
Pour la question du rôle que peuvent jouer les environnements informatiques quant aux fonctions du dessin, modèle d'un objet géométrique dans l'espace, nous nous sommes proposé de mettre à l'épreuve **l'hypothèse "environnement-informatique"** de recherche suivante :

Les problèmes de construction effective et de construction évoquée peuvent coexister dans des environnements informatiques répondant à certains critères.

Pour cela, nous avons analysé la vie des problèmes de constructions effective et évoquée dans l'environnement informatique Geospace. (Chapitre D1)
De plus, un travail analogue au dispositif expérimental du chapitre C3, a été fait auprès des enseignants ayant utilisé un environnement informatique de la géométrie plane et /ou dans l'espace. Ce travail nous permis de voir si le rapport de ces enseignant aux problèmes de construction change ou non. (Chapitre D2).

6.2. Organigramme de la thèse

Nous proposons ci-dessous, l'enchaînements des chapitres et l'objet d'étude de chacun d'eux.


CHAPITRE A
Problématique
Fonctions du dessin dans le plan
Fonctions du dessin dans l'espace
Questions et hypothèses
CHAPITRE B
Lecture d'un dessin
Mise à l'épreuve de l'hypothèse "Convention"
Mise à l'épreuve de l'hypothèse de recherche "fonctions du dessin comme contraintes"
Chapitre C1
Analyse de la vie de l'objet "problème de construction" à des moments où le rapport intitutionnel à ces objets est stable
PARTIE C
Problèmes de construction dans l'environnement "papier-crayon"
Chapitre C2
Analyse de la vie de l'objet "problème de construction" au cours de la période 1982 - 94
Chapitre C3
Etude du rapport personnel des enseignants à l'objet "problèmes de construction dans l'espace"
Chapitre D1
Analyse de la vie de l'objet "problème de construction" dans l'environnement informatique
PARTIE D
Problèmes de construction dans l'environnement informatique
Chapitre D2
Etude du rapport personnel des enseignants à l'objet "problèmes de construction dans l'espace"

PARTIE B

CHAPITRE B

LECTURE D'UN DESSIN DE L'ESPACE

L'objet de ce chapitre est de mettre en évidence les conséquences des conventions et représentations-types développées dans le chapitre précédent sur la lecture par les élèves d'un dessin de l'espace. Ce travail nous permettra de valider l'hypothèse de recherche "Convention" selon laquelle les conventions de représentation de la perspective cavalière deviennent des règles d'interprétation d'un dessin chez les élèves.
Nous présenterons dans un premier temps les résultats d'un test sur la lecture du dessin proposé par B. Parzysz. A partir de ces résultats nous dégagerons des hypothèses sur les interprétations possibles que peuvent faire les élèves lors de la lecture d'un dessin et nous formulerons des conjectures sur d'autres règles d'interprétation. Dans un deuxième temps, nous proposerons un dispositif expérimental pour valider ces conjectures.

Les interprétations que nous cherchons à mettre en évidence trouvent leur origine dans les conventions et représentations-types utilisées dans l'enseignement.
Notre première hypothèse est que les conventions de représentation de relations d'incidence qui ont été explicitées dans les manuels ou par les enseignants, sont utilisées dans la lecture du dessin.
Nous nous intéressons donc plus particulièrement aux interprétations sous-jacentes à la lecture d'un dessin qui sont des conséquences des dessins prototypiques utilisés de façon implicite dans l'enseignement.
La lecture d'un dessin va dépendre d'une part des propriétés géométriques disponibles chez l'élève et d'autre part d'une lecture perceptive résultat d'un apprentissage qui n'est pas sous la responsabilité de l'enseignant et qui est donc, pour une part, culturel. Dans certains cas, ces deux aspects peuvent être en conflit.

1. TEST PROPOSE PAR B. PARZYSZ

A propos de la "lecture" de dessins dans l'espace Parzysz (1989), dans sa thèse[1], rend compte d'un test construit pour savoir "comment les élèves du lycée interprètent - en ce qui concerne les positions relatives de leurs différents constituants - quelques dessins classiques relatifs à des situations courantes de la géométrie de l'espace, faisant intervenir des plans, des droites et des points." (Parzysz, 1989, p. 263). Nous proposons d'abord de rappeler les résultats de ce test.

1 Parzysz B. 1989, Chapitre 10 de la thèse, "Lecture" de situations "classiques", pp 263-286.

1.1. Résultats du test

Cinq situations[2] ont été proposées à des élèves de seconde et première. Pour chacune de ces situations, un dessin, accompagné d'un texte décrivant les objets représentés mais non les relations des objets entre eux, est proposé. L'élève doit indiquer ses réponses dans un tableau[3]. Il doit choisir une proposition parmi celles qui lui sont proposées. Ces propositions portent sur les positions relatives des objets ou des relations d'incidence. Dans chaque situation, l'élève peut en outre choisir "Le dessin ne permet pas de répondre" ou "Je ne sais pas".

1.1.1. Situation 1 : Positions de points par rapport à un plan

Les élèves doivent dire si l'un des points A, B et C est dans le plan P (fig. 12).

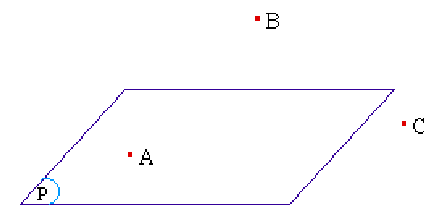


fig. 12

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous[4]

183 élèves	est dans le plan P	n'est pas dans le plan P	le dessin ne permet pas de répondre	Je ne sais pas
Le point A	136	0	47	0
Le point B	0	137	46	0
Le point C	4	116	63	0

Tableau 1

Les résultats montrent que pour un plus du quart des élèves, le dessin ne permet pas de répondre. Pour 3/4 des élèves ont considéré le point A dans le plan P. De même, 3/4 des élèves ont considéré le point B à l'extérieur du plan.

Pour le point C, certains, mais très peu, l'ont considéré dans le plan P (4 élèves), et l'auteur conclut, "que la proportion d'élèves répondant que «le point n'est pas dans le

2 Annexe A2a
3 Annexe A2a
4 B. Parzysz, 1989, p.265

plan P» est significativement moins élevée (au seuil de 95%) pour le point C que pour le point B. Nous interprétons naturellement ceci en disant que, pour les élèves, la situation est moins claire pour le point C que pour le point B. Ainsi le point C dessiné comme B à l'extérieur du parallélogramme représentant le plan P, peut plus être imaginé dans ce plan que le point B. Il semble donc que «le prolongement mental» du plan P dans le sens horizontal ... se fasse plus facilement que dans le sens vertical." (B. Parzysz, 1989, pp. 266 -267).

1.1.2. Situation 2 : Positions de droites relativement à un plan

Cette situation propose d'examiner les lectures que font les élèves par rapport aux positions relatives d'une droite et d'un plan. Les élèves doivent dire d'après le dessin pour chacune des droites si elle est dans le plan P, sécante au plan P ou elle n'a aucun point dans le plan P.

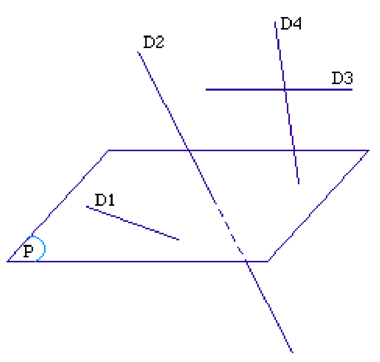


fig. 13

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous[5]

183 élèves	est tout entière dans P	coupe P en un point	n'a aucun point dans le plan P	Le dessin ne permet pas de répondre	Je ne sais pas
La droite D1	148	1	2	32	0
La droite D2	2	179	1	1	0
La droite D3	0	1	163	17	2
La droite D4	0	53	27	102	1

Tableau 2

- 80% des élèves on répondu que D1 est "Tout entière dans le plan P".
- L'existence des pointillés sur la représentation de la droite D2, à l'intérieur du parallélogramme représentant P, va dans le sens de la lecture d'une convention de

5 B. Parzysz, 1989, p.269

représentation d’une droite sécante avec un plan ("droite-sec-plan"). Nous avons fait l’hypothèse que les élèves diraient que la droite est sécante avec le plan P. Les résultats confirment notre hypothèse puisque près de 97% des élèves ont fait cette lecture.

- Pour D3, près de 90% des élèves ont choisi comme réponse "n’a aucun point dans le plan P". On peut avancer deux hypothèses pour ce choix. La première est que l'élève considère que la droite D3 est parallèle au plan P. La deuxième est que l'élève considère que la droite D3 n'a aucun point commun avec le plan P. Et dans ce dernier cas, l'élève aurait répondu la même chose pour le dessin suivant :

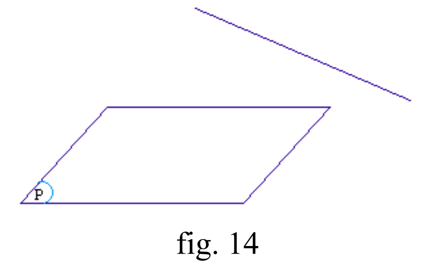


fig. 14

- Dans le cas de la droite D4, presque 29% des élèves pensent qu’elle est sécante avec le plan P.

Plus de 50% des élèves ont répondu que le dessin ne permet pas de répondre. B. Parzysz l'explique par : “l'interprétation de D4 peut se faire par référence à celle de D2 : pour D2, sécante à P, le point d'intersection avec le plan est clairement désigné, grâce à la ponctuation. Or, ce n'est pas le cas pour D4. Qu'en conclure ? ... En bref, les raisons d'hésiter et de rester perplexe ne manquent pas ici, ce qui reflète bien la variété des réponses données par les élèves et en particulier le pourcentage impressionnant réalisé par l'item "le dessin ne permet pas de répondre"”. (B. Parzysz, 1989, p.271).

1.1.3. Situation 3 : Positions relatives de plans entre eux

Dans cette situation 128 élèves doivent dire pour chacun des plans P1, P2 et P3, s’il est parallèle ou sécant avec le plan Q :

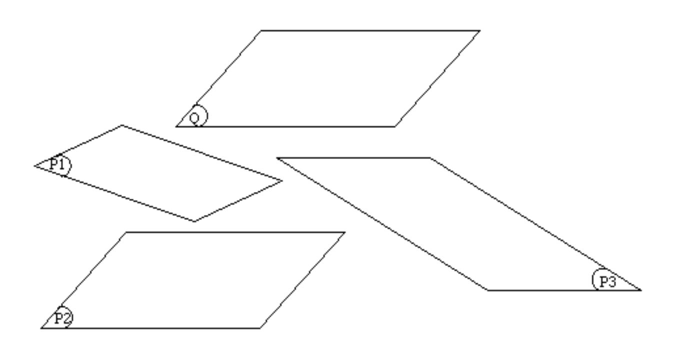


fig. 15

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous[6]

128 élèves	coupe le plan Q	est parallèle à Q	∩[7]	n'a aucun point commun avec Q	le dessin ne permet pas de conclure	Je ne sais pas
Le plan P1	69	2	1	41	15	0
Le plan P2	2	73	47	2	4	0
Le plan P3	71	6	3	24	22	2

Tableau 3

Près de 93% des élèves ont interprété que les plans P2 et Q sont parallèles. Notons que ces plans sont représentés par des parallélogrammes à bords parallèles deux à deux. B. Parzysz s'est interrogé sur le cas où les représentations des plans seraient à bords parallèles mais obliques (cas non étudié).

Un peu plus de 55% des élèves ont considéré que les plans P3 et Q sont sécants et 19% pensent que ces deux plans n'ont aucun point commun. Nous pensons que les résultats auraient pu être différents :

- si d'une part le dessin ne portait que sur les plans P3 et Q afin que les autres représentations, en particulier le plan P2, n'interfèrent pas dans la lecture du dessin.
- si d'autre part, le côté "le plus grand" de P3 était parallèle au côté horizontal du parallélogramme Q (fig. 16).

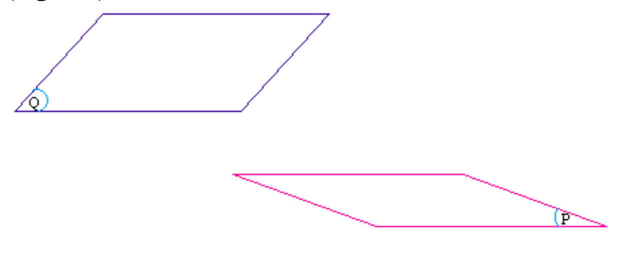


fig. 16

Pour le cas du plan P1, les réponses sont principalement entre "P1 coupe le plan Q" (54%) et "P1 n'a aucun point commun avec Q" (32%).

Revenons sur la catégorie d'élèves ayant répondu "n'a aucun point commun avec le plan Q" dans le cas du plan P1 (32%) et dans le cas du plan P3 (18%). Nous rejoignons l'auteur sur l'interprétation des résultats : "il s'agit du fait que les <u>représentations</u> de P1 et Q sont <u>disjointes</u>, lequel peut induire l'idée que les plans eux-mêmes sont disjoints"

6 B. Parzysz, 1989, p.273

7 ∩, désigne l'ensemble des élèves ayant répondu à la fois "est parallèle à Q" et "n'a aucun point commun avec Q"

(B. Parzysz, 1989, p.274), pour le cas du plan P3 il ajoute, "ceci, somme toute comparable avec les résultats obtenus pour le plan P1".

1.1.4. Situation 4 : Position relative de droites entre elles

Dans cette situation les élèves doivent dire pour chacune des droites du dessin (fig. 17) si elle coupe Δ, est parallèle à Δ ou est ni parallèle ni sécante à Δ.

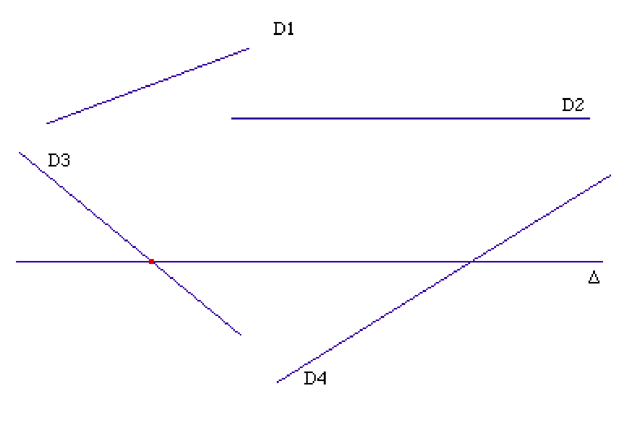


fig. 17

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous[8]

182 élèves	coupe la droite Δ	est parallèle à Δ	n'est ni parallèle, ni sécante à Δ	Le dessin ne permet pas de répondre	Je ne sais pas
La droite D1	21	1	46	112	2
La droite D2	1	174	1	5	1
La droite D3	175	1	2	3	1
La droite D4	28	2	80	18	0

Tableau 4

Dans le cas de la droite D2, 95% des élèves pensent qu'elle est parallèle à Δ. On peut dire que pour ces élèves, si deux droites sont représentées par deux segments parallèles alors elles sont interprétées comme étant deux droites parallèles.
Ensuite l'auteur a proposé deux droites, D3 et D4, dont les représentations sont sécantes avec la droite Δ. De plus, pour D3 un point est marqué à l'endroit où les représentations des droites D3 et Δ sont sécantes, ce qui inciterait davantage les élèves à lire que les droites sont sécantes, selon l'hypothèse "C : droites sécantes". Ce qui a été confirmé par les résultats (96% des réponses). Pour D4, aucun accent n'a été mis sur l'endroit où les représentations des droites sont sécantes, et le nombre d'élèves ayant répondu que D4

8 B. Parzysz, 1989, p.279

est sécante avec Δ est nettement inférieur à celui du cas de D3. Nous rejoignons l'explication de l'auteur selon laquelle “ la "lecture" de D4 se fait par rapport à celle de D3. IL est graphiquement manifeste que D3 coupe Δ ("gros point"), mais ce n'est pas le cas pour D4 (aucun signe au point d'intersection des représentations). Par conséquent - peut se dire le lecteur - le cas de D4 est à distinguer de celui de D3 : c'est donc que D4 n'est pas sécante à Δ. Et comme manifestement elle ne peut être parallèle, l'élève se reporte alors sur la seule solution restante” (B. Parzysz, 1989, p. 280).
Enfin, pour la droite D1, 61% des élèves ont répondu juste : "le dessin ne permet pas de répondre", mais peut être pour une raison erronée.

1.2. Conclusion

a) Régionnement de l'espace

La première situation a mis en évidence deux règles d'interprétation relatives à un régionnement défini par le parallélogramme représentant un plan : "int-plan" et "ext-plan".

Interprétation "int-plan"

Soit un parallélogramme représentant un plan. Un point représenté à l'intérieur du parallélogramme, représentant un plan, est interprété comme un point appartenant à ce plan.

Interprétation "ext-plan"

Soit un parallélogramme représentant un plan. Un point représenté à l'extérieur du parallélogramme, représentant un plan, est interprété comme un point n'appartenant pas à ce plan.

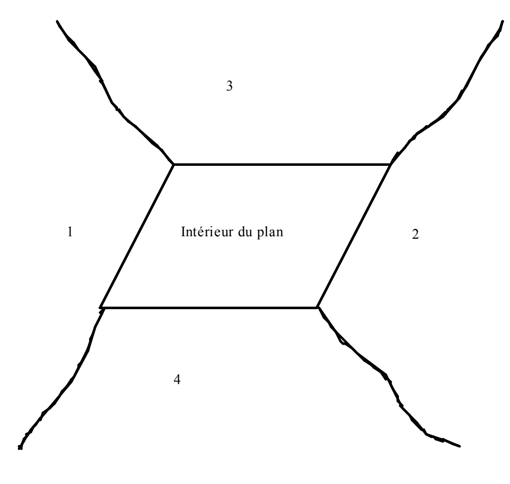


fig. 18

De plus, les élèves font plus facilement le "prolongement mental" dans le sens horizontal que dans le sens vertical.
Ainsi, les régions 1 et 2 peuvent être considérées comme faisant partie du plan plus que les régions 3 et 4. Cependant, on peut se demander pour ces dernières s'il n'y a pas un régionnement spécifique que nous formulons sous forme de conjecture :

Conjecture 1 : "au-dessus / au-dessous"
Un point de la région 3 peut être interprété comme au dessus du plan. Un point de la région 4 peut être interprété comme au dessous du plan

b) Position relative d'une droite par rapport à un plan

Les résultats ont mis en évidence la règle d'interprétation ci-dessous, qu'on notera "droite-int-plan"

Interprétation "droite-int-plan" :

Soit un parallélogramme représentant un plan. Un segment à l'intérieur du parallélogramme, sera interprété comme une droite incluse dans P.

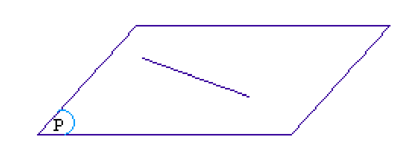


fig. 19

La nature des questions proposées et le fait que toutes les droites sont sur le même dessin ne nous ont pas permis de dégager d'autres règles d'interprétation possible. Nous formulons cependant des conjectures.

Conjecture 2 : Interprétation "droite-//-plan"
Soit un parallélogramme représentant un plan.

a - Un segment parallèle à un segment, représenté à l'intérieur du parallélogramme, sera interprété comme droite parallèle au plan.

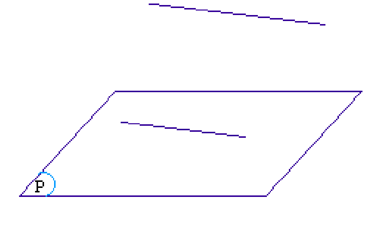


fig. 20

b - Un segment parallèle à un des côtés du parallélogramme est interprété comme une droite parallèle à ce plan. Dans ce cas, les côtés du parallélogramme sont considérés comme des droites du plan.

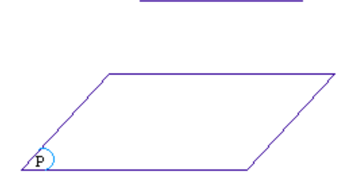


fig. 21

La droite D3 (fig. 13) étant représentée par un segment parallèle à un côté du parallélogramme, représentant le plan P, doit induire chez les élèves, selon notre hypothèse "règle d'interprétation "droite-//-plan" (cas b)", que la droite D3 est parallèle au plan P. Il aurait donc été intéressant qu'une question ait porté sur le parallélisme

<u>Conjecture 3 : Interprétation "droite-ext-plan" :</u>
Soit un parallélogramme représentant un plan.
L'absence de pointillés sur la représentation d'une droite, extérieure au parallélogramme, peut induire que la droite n'est pas sécante avec ce plan.

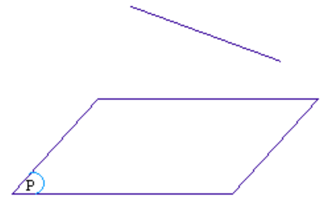


fig. 22

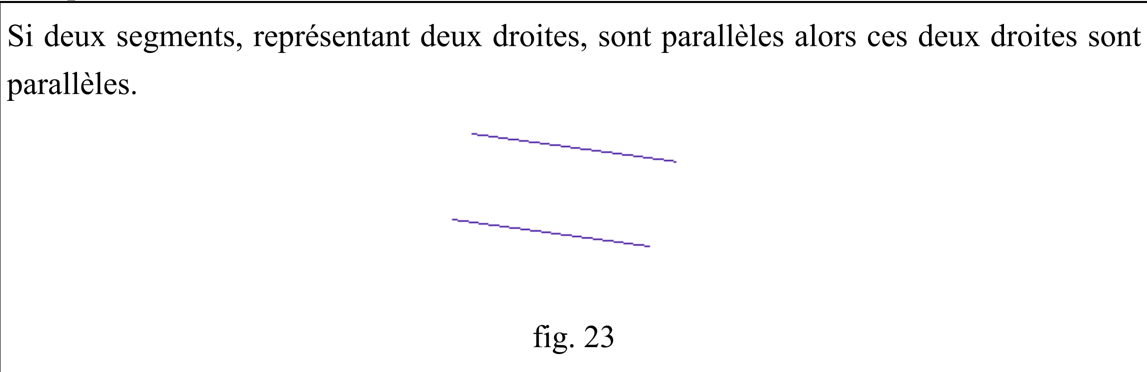
<u>Conjecture 4 : Interprétation "droite-sec-plan" :</u>
Soit un parallélogramme représentant un plan.
Si un segment, représentant une droite, a une extrémité à l'intérieur du parallélogramme, et l'autre à l'extérieur du parallélogramme alors cette droite sera considérée comme étant sécante au plan P.

c) Position relative de deux droites entre elles

La situation 4 a mis en évidence une règle d'interprétation que nous appelons "droite-//-droite" :

Interprétation "droite-//-droite"

Si deux segments, représentant deux droites, sont parallèles alors ces deux droites sont parallèles.


fig. 23

De plus, les résultats montrent qu'en présence d'une représentation de deux droites sécantes avec un point indiquant l'intersection (fig. 24), les élèves considèrent que les droites dont les représentations sont sécantes sans l'indication du point d'intersection, (fig. 25) comme "ni parallèles ni sécantes".

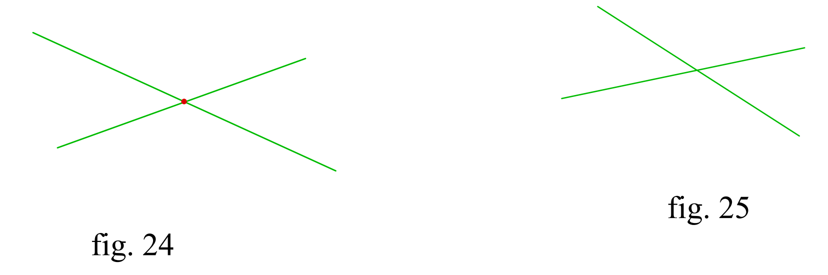
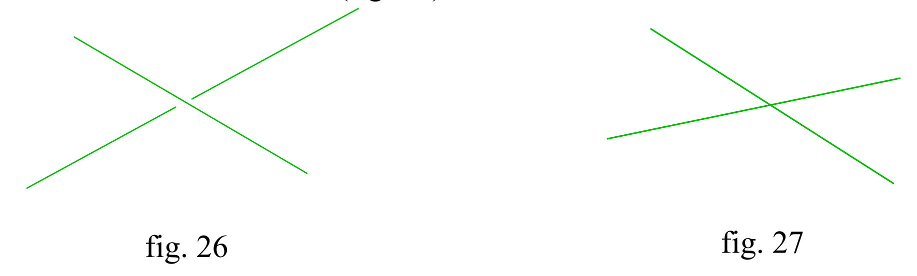

fig. 25

fig. 24

Nous pensons qu'on aura des résultats analogues dans le cas où sur le même dessin sont représentées deux droites par deux segments, avec un "blanc" sur une droite à l'endroit de l'intersection, comme sur la figure (fig. 26). Les élèves considéreront les droites dont les représentations sont sécantes, (fig. 27) comme des droites sécantes.


fig. 26 fig. 27

Dans le cas de fig. 24, nous dirons qu'il s'agit d'une convention "droites sécantes", si elle a fait objet d'une institutionnalisation.

Dans le cas de fig. 26, nous dirons qu'il s'agit d'une convention "droites non sécantes", si elle a fait objet d'une institutionnalisation.

Nous nous sommes alors demandés comment les élèves interprèteraient le dessin du type ci-dessus (fig. 27) en l'absence de la représentation des droites selon l'une des convention "droites sécantes" ou "droites non sécantes" ? Et nous formulons la conjecture :

conjecture 5 : Interprétation "droite-sec-droite"

Si deux segments, représentant deux droites, sont sécants alors ces deux droites sont sécantes. (En dehors de possibilités de comparaison)

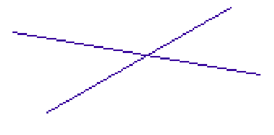


fig. 28

d) Position relative de deux plans entre eux

Les résultats précédents montrent que le dessin prototypique du parallélisme de deux plans induit chez les élèves une règle d'interprétation que nous notons "plan-//-plan".

Interprétation "plan-//-plan"

Si deux plans P et Q sont représentés par deux parallélogrammes ayant des bords parallèles, alors ces plans sont parallèles.

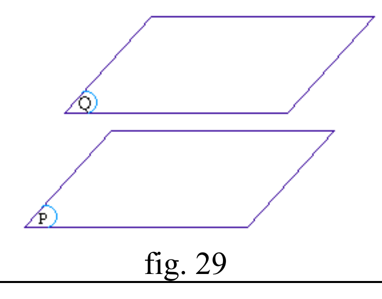


fig. 29

Dans le cas où seulement deux bords sont parallèles cette règle n'est plus vraiment induite. En effet, dans ce dernier cas, le nombre d'élèves ayant répondu que les plans sont parallèles est très faible.

2. POURQUOI UN NOUVEAU QUESTIONNAIRE

Le test de B. Parzysz a mis en évidence l'influence des conventions et des dessins prototypiques sur la lecture des dessins par les élèves. Ainsi, nous avons dégagé des règles d'interprétation et nous avons formulé des conjectures relativement à d'autres règles d'interprétation que nous voudrions vérifier.

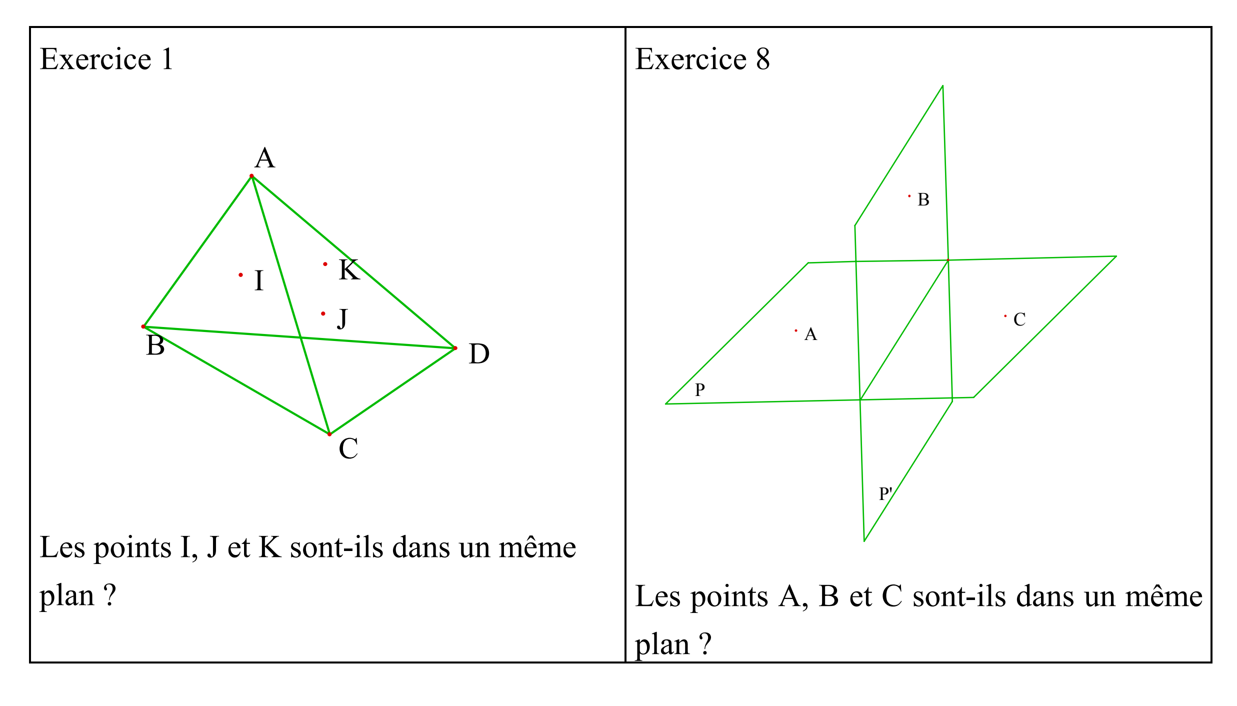
De plus, ce test n'a pas pris en compte la variable "solide" et, plus précisément, les dessins représentant des solides usuels. Nous pensons que c'est une variable importante pour la lecture des dessins de l'espace, d'autant plus que ce test a été fait en 1988 alors que, depuis, les programmes de géométrie dans l'espace ont changé dans l'enseignement

secondaire. En particulier, le programme du collège est axé sur la géométrie du solide[9] et au lycée les solides occupent une place importante dans les exercices.
Enfin, certains cas d'incidence n'ont pas été examinés par ce test.
Nous proposons donc un questionnaire qui nous permettra d'examiner les conjectures développées en 1.2 et de tenir compte de la variable "solide".

3. CHOIX DU QUESTIONNAIRE ET ANALYSE A PRIORI

Nous avons proposé à des élèves un questionnaire dans lequel ils doivent, à partir d'un dessin, répondre à des questions portant sur des relations d'incidence. L'élève doit choisir entre trois réponses : "oui", "non" et "on ne peut rien dire". Chacune des réponses doit être justifiée. En effet, nous pensons que les justifications nous permettront de mieux interpréter les réponses d'élèves. Elément qui n'a pas été pris en compte dans le test de Parzysz, et dont nous avons montré l'intérêt dans le paragraphe précédent.
Afin d'éviter une interférence entre les interprétations concernant plusieurs objets, nous n'avons proposé qu'une question par dessin.
Ce travail a été réalisé suite à un enseignement de la géométrie dans l'espace en classe de Seconde. Nous avons choisi cette classe puisque c'est à ce niveau que les propriétés d'incidence de la géométrie dans l'espace sont étudiées.

3.1. Exercices proposant l'étude de l'incidence de trois points



Exercice 1	Exercice 8
Les points I, J et K sont-ils dans un même plan ?	Les points A, B et C sont-ils dans un même plan ?

9 Cf. Chapitre C2

Dans ces deux exercices, nous avons représenté trois points non alignés. La question porte sur leur appartenance à un même plan.
Deux variables ont été retenues :
a) Nature des objets étudiés : solide ou non.
Dans l'exercice 1, nous avons proposé un tétraèdre, qui est un solide usuel, et dans l'exercice 8, la représentation de deux plans sécants.
b) Etre ou non à l'intérieur d'un polygone
Dans l'exercice 1 :
- les points I, J et K sont à l'intérieur du triangle ABD.
- les points I, J et K sont à l'extérieur du triangle BCD
- Les points J et K sont à l'intérieur du triangle ACD et I à l'intérieur du triangle ABC.
Dans l'exercice 8 :
- les points A et C sont à l'intérieur du parallélogramme représentant P et à l'extérieur du parallélogramme représentant P'.
- le point B est à l'intérieur du parallélogramme représentant P' et à l'extérieur du parallélogramme représentant P.

3.1.1. Réponses attendues

a) Exercice 1

- R1a : "Oui, car trois points définissent un plan"
- R1b : "Oui, car les points I, J et K sont sur la même face ABD", c'est-à-dire que comme les points sont à l'intérieur du triangle ABD, alors ils sont dans un même plan.
- R1c : "Oui, car les points I, J et K sont dans le même plan ABD"
- R1d : "Non, car les points I, J et K ne sont pas sur la même face".
- R1e : "Non, car les points I, J et K ne sont pas dans le même plan".
- R1f : "On ne peut rien dire, car on ne sait pas si le point I appartient au plan ACD", ou une justification équivalente.

Pour les réponses R1d et R1e, on pourra avoir des justifications plus précises du type I appartient à (ABC) alors que J et K appartiennent à (ACD).
- R1g : "On ne peut rien dire, car il manque des informations"
- R1x : absence de réponse ou sans justification.

b) Exercice 8

- R8a : "Oui, car trois points définissent un plan"

- R8b : "Non, car les points A, B et C ne sont pas sur le même plan" (par exemple, le point B n'appartient pas au plan P contenant A et C).
- R8c : "On ne peut rien dire, car le point B peut être dans le plan P contenant A et C" (ou des justifications équivalentes).
- R8g : "On ne peut rien dire, car il manque des informations"
- R8x : absence de réponse ou sans justification.

c) Commentaires et interprétations des réponses a priori d'élèves

- Les réponses justes sont R1a et R8a : l'élève utilise une propriété géométrique pour la caractérisation d'un plan par trois points. On notera ces catégories de réponses par **"P"**.

- Les réponses R1b, R1c, R1d, R1e et R8b : elles expriment que le plan est réduit au polygone qui le représente. Ces réponses manifestent l'interprétation du régionnement de l'espace "int-plan". Les réponses R1b et R1d sont spécifiques du cas du solide (interprétation "solide"). On notera cette catégorie de réponses **"Pg"**
La variable "solide" doit renforcer les interprétations favorisant les réponses de la catégorie "Pg". Donc on pense qu'il y aura plus de réponses du type "Pg" pour l'exercice 1 que pour l'exercice 8.

- Les réponses R8c : l'élève sait qu'un point peut appartenir à un plan sans être à l'intérieur du polygone le représentant. Plusieurs hypothèses sont possibles :
1) il ne sait pas que trois points sont toujours dans un même plan,
2) c'est un effet du contrat didactique, à propos de la résolution de problème, soit que l'élève n'ait considéré que les éléments donnés dans le problème soit qu'il ait interprété la question comme si on lui demandait "les trois points appartiennent-ils à l'un des plans représentés ?". Notons que cette hypothèse peut être valable pour les autres catégories de réponses.

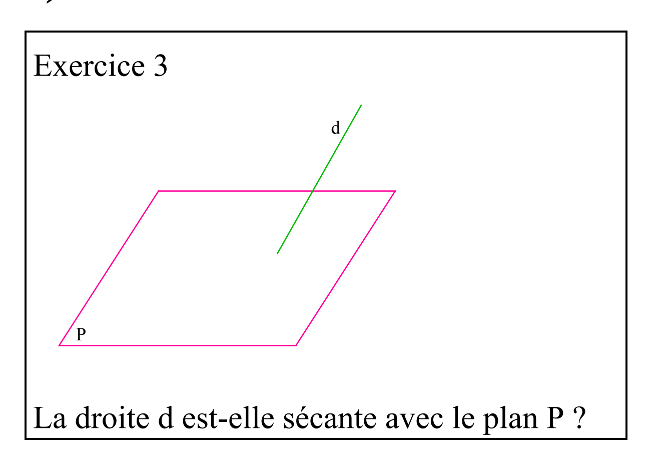
3.2. Exercices proposant l'étude des positions relatives d'une droite par rapport à un plan

Nous avons distingué deux variables pour le choix des exercices : nature de l'objet étudié et interprétations possibles quant aux positions relatives d'une droite avec un plan. Nous allons présenter les exercices en nous intéressant d'abord à la première variable, et ensuite, pour chacun d'eux, nous préciserons le choix fait par rapport à la deuxième variable.

3.2.1. Cas où les objets étudiés ne sont pas des solides

Etant donné que le test proposé par B. Parzysz a confirmé la règle d'interprétation "droite-int-plan"[10], nous proposons d'examiner les conjectures 2 et 3 relatives aux règles d'interprétation respectivement "droite-//-plan" et "droite-ext-plan".
Il s'agit des exercices 3, 5 et 10. Dans les trois exercices nous avons représenté un plan par un parallélogramme.

a) Exercice 3



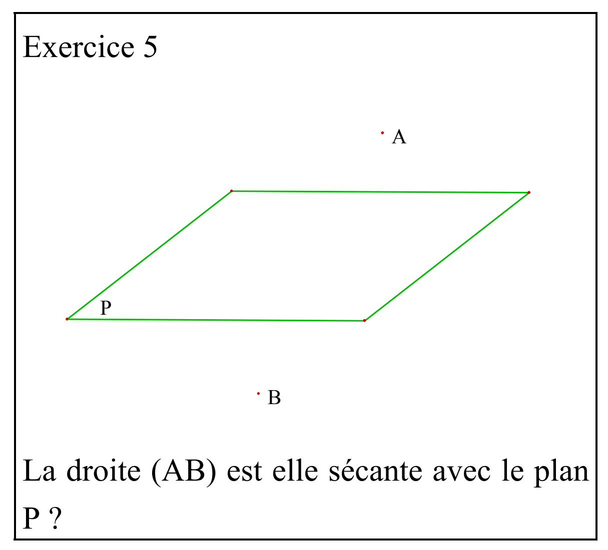
Nous avons représenté la droite à l'aide d'un segment ayant une extrémité à l'extérieur du parallélogramme, et une deuxième extrémité à l'intérieur du parallélogramme.

Les réponses possibles :
R3a : "Oui, parce qu'un point de la droite appartient au plan"
R3b : "Non, car sinon on aurait représenté des pointillés"
R3c : "On ne peut rien dire, puisqu'il manque des informations"

Nous faisons l'hypothèse que la réponse R3a sera majoritaire. Cette réponse révèle l'utilisation de la règle d'interprétation "droite-sec-plan".
Pour les réponses du type R3c, il sera intéressant de voir quelles sont les informations manquantes.

10 Cf. b)) Position relative d'une droite par rapport à un plan; p.75

b) Exercice 5



Ici la droite n'est pas représentée par un segment mais elle est définie par deux points A et B représentés sur le dessin de sorte que A soit "au dessus" du parallélogramme et "B "au dessous" du parallélogramme.

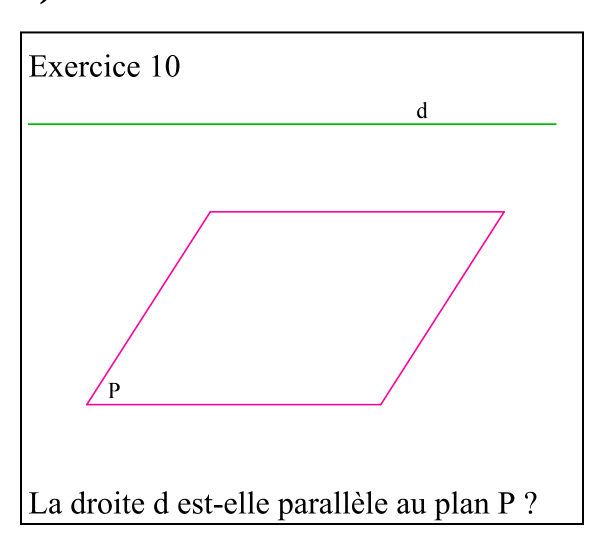
Les réponses attendues :

R5a : "oui , car A et B sont de part et d'autre du plan P"

R5b : "On ne peut rien dire, car il manque des informations"

Nous faisons l'hypothèse qu'il n'y aura pas de réponse "non". La variable choisie est le régionnement de l'espace. Ainsi, les réponses R5a révèleront l'utilisation de la règle d'interprétation "ext-plan".

c) Exercice 10



Le segment représentant la droite est parallèle à un côté du parallélogramme. Le choix d'un côté horizontal a été fait pour renforcer la réponse "oui".

Les réponses attendues :

R10a : "oui, car d est parallèle à une droite du plan P"

R10b : "On ne peut rien dire, car il manque des informations"

A travers les réponses des élèves, nous examinerons la conjecture 2 relative à la règle d'interprétation "droite-//-plan" (cas b)". Nous pensons que les réponses du type R10a seront majoritaires.

3.2.2. Cas où l'objet étudié est un solide

Nous avons proposé quatre exercices (2, 4, 9 et 11) avec une représentation d'un solide et un segment représentant une droite d. Pour l'ensemble des exercices nous avons choisi un cube comme solide. En plus du fait que c'est un solide usuel, nous l'avons choisi parce que dans l'enseignement du collège on commence à travailler la notion de parallélisme sur un cube. Nous pensons que le choix de ce solide pour étudier les problèmes d'incidence peut se justifier par la présence de faces parallèles, d'arêtes parallèles et de deux faces représentées en vraie grandeur. Ceci nous permettra en particulier de voir si les élèves privilégient les plans verticaux ou horizontaux.

a) Variables

Deux variables ont été retenues : la question et le régionnement de l'espace par un cube.

i) <u>Question</u>

Deux types de questions sont examinés : être dans un plan ou être parallèle à un plan. Ces plans sont définis par une face de cube.

ii) <u>Régionnement de l'espace par un cube</u>

Ce régionnement a des aspects culturels. Par exemple, dans le cas du dessin (fig. 30), selon les personnes, on pense que d sera vue soit dans le plan (CDGH), soit dans le plan (ABCD), soit "au dessous" du cube, alors que dans le cas du dessin (fig. 31) d sera vue dans le plan (ABFE) ou " au dessus" du cube.

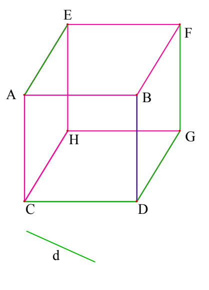


fig. 30

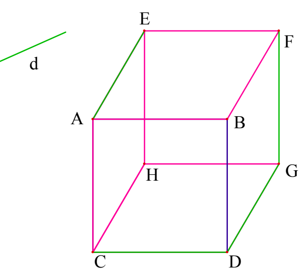
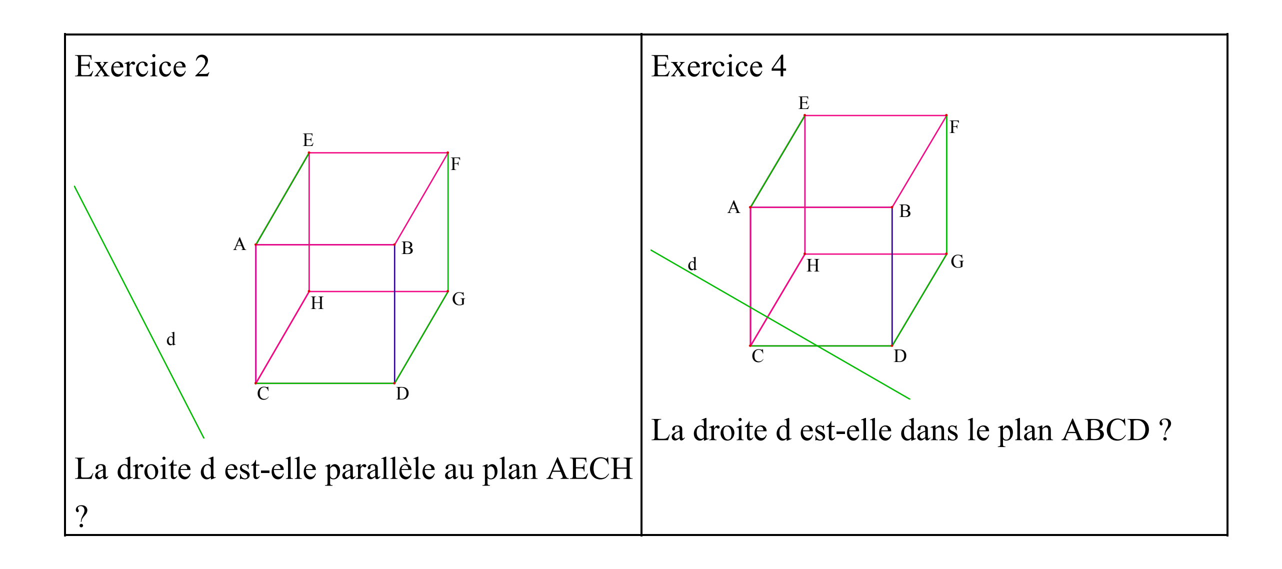
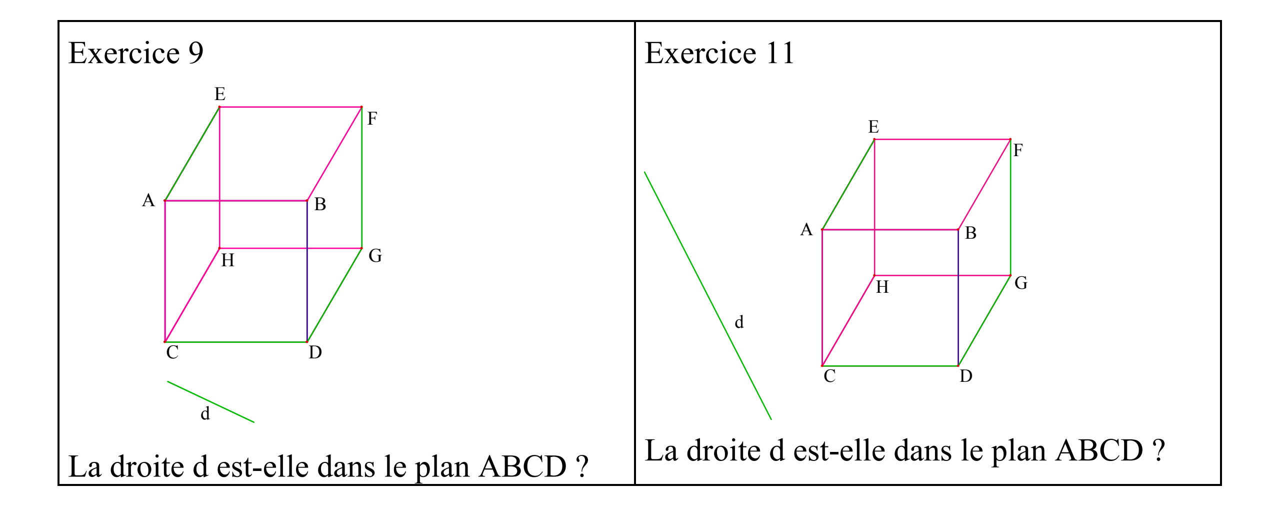


fig. 31

b) Les exercices





Dans les exercices 4, 9 et 11, il s'agit de dire si une droite d est dans le plan défini par la face frontale avant du cube. Nous avons fait varier la position du segment représentant la droite par rapport au cube.

c) Exercice 2

Les réponses attendues sont :
R2a : "Non, car d n'est parallèle à aucune droite du plan". C'est une conséquence de la règle d'interprétation "droite-//-plan"
R2b : "Non, d est dans le plan ABCD". Nous avons fait l'hypothèse que dans ce cas certaines régions du plan de représentation "feuille de papier" sont considérées dans le plan de la face frontale.

R2c : "Non, car d n'est pas verticale". Dans ce cas nous pensons que, pour les élèves, seules les droites "verticales" sont parallèles aux plans "verticaux" ABCD, BDGF, EHGF et ACHE.
R2d : "On ne peut rien dire, car il manque des informations".

Nous cherchons à voir dans quelle mesure la variable "solide" influence le type de justification. Comme nous faisons l'hypothèse que la majorité des réponses sera "non", sans tenir compte de la variable "solide", nous supposons que la réponse majoritaire sera du type "R2a".

d) Exercices 4, 9 et 11

La variable est le régionnement de l'espace par un cube présenté ci-dessus. Nous faisons l'hypothèse que pour l'exercice 4, la majorité des réponses sera "oui" selon la règle d'interprétation "droite-int-plan", alors qu'elle seront "non" pour 9 et 11. De plus, nous voulons voir s'il y a des réponses différentes et quelle est l'influence de la variable "régionnement de l'espace" par un cube.
Nous donnons ci-dessous les types de réponses attendues pour chaque exercice.

i) Exercice 4
R4a : "oui, car d a une partie commune avec le plan"
R4b : "Oui, car d est sécante avec les droites (AC) et (CD)" (ce qui peut aussi être justifié par le fait qu'il n'y a pas de blanc à l'endroit des intersections).
R4c : "Oui, car sinon il y aurait des pointillés"
R4d : "On ne peut rien dire, car il manque des informations ..."
ii) Exercice 9
R9a : "Non, car d est à l'extérieur du plan"
R9b : "Non, car d est dans le plan CDGH"
R9c : "Oui, car sinon il y aurait des pointillés"
R9d : "On ne peut rien dire, car il manque des informations ..."
iii) Exercice 11
R11a : "Non, car d est à l'extérieur du plan"
R11b : "Oui, car d est dans le plan ABCD"
R11c : "Oui, car sinon il y aurait des pointillés"
R11d : "On ne peut rien dire, car il manque des informations ..."

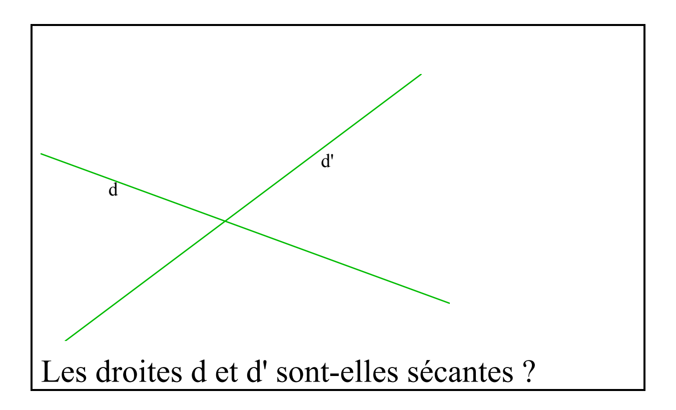
Les réponses justes sont R4d, R9d, et R11d.

3.3. Exercices proposant l'étude de la position relative de deux droites entre elles

Pour cet item nous avons proposé deux exercices 6 et 7.

3.3.1. Exercice 7

Il s'agit d'examiner la conjecture 5 relative à la règle d'interprétation "droite-sec-droite". Deux droites sont représentées par deux segments sécants, en l'absence de représentation des droites selon l'une des convention "droites sécantes" ou "droites non sécantes" (cf. c), p.76).

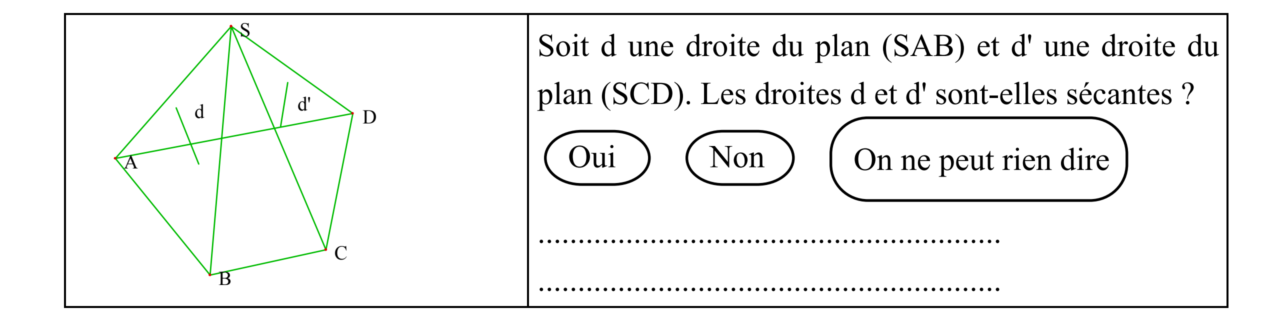


Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

Les réponses et justifications attendues sont :
R7a : "Oui, car elles ont un point d'intersection". Cette réponse est une conséquence de la règle de la perspective cavalière, la conservation de concours. Ici elle est utilisée dans le cas de la lecture.
R7b : "Oui, elles ne sont pas parallèles" . Dans ce cas l'élève raisonne comme dans le plan.
R7c : "Oui, car si elles n'étaient pas sécantes il aurait fallu représenter par un blanc mis avant et après le point d'intersection sur une des deux droites ". Cette réponse fait référence à la convention "droites non sécantes".
R7d : "Non, car si elles étaient sécantes, alors il y aurait un point d'intersection". Cette réponse fait référence à la convention "droites sécantes".
R7e : "On ne peut rien dire" en justifiant par le fait que les deux cas peuvent se présenter, puisque c'est une figure de l'espace.

3.3.2. Exercice 6

Cet exercice porte sur un solide, une pyramide SABCD, les deux droites d et d' étant représentées par deux segments à l'intérieur des triangles SAB et SCD.



Contrairement aux autres exercices, pour cet exercice nous avons précisé certaines relations entre les objets géométriques. Ces données permettent de décider au niveau du dessin si les droites sont sécantes ou non. C'est ce type de situation que les élèves sont invités à résoudre dans des problèmes de géométrie dans l'espace où la construction est possible sur le dessin.

En prolongeant les représentations des droites d et d', on se trouve dans la même situation que pour l'exercice 7.

Nous nous intéressons aussi dans cet exercice, aux réponses des élèves ayant répondu "oui" à la question de l'exercice 7 en justifiant par l'absence de marquage, que les droites ne sont pas sécantes. En effet, l'utilisation de cette convention va dans le sens de l'illustration. Or lorsque l'élève résout l'exercice a priori, il ne sait pas si les droites sont sécantes ou non.

4. DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Nous avons proposé ce questionnaire aux élèves de quatre classes que nous nommerons dans la suite Sa, Sb, Sc et Sd. Les effectifs respectifs de ces quatre classes étaient : 29, 26, 25 et 23.

A chaque enseignant, nous avons donné la consigne de ne pas répondre à des questions relatives aux dessins et de limiter ses interventions à l'explicitation de la tâche.

5. RECUEIL ET ANALYSE DES DONNEES

A chaque copie a été attribué un code constitué par des lettres en relation avec la classe et par un nombre en relation avec l'élève. Ensuite, dans chacune des copies, nous avons indiqué la réponse de l'élève (O "oui", N "non" ou OR "on ne peut rien dire"), et examiné si celle-ci avait été justifiée[11].

[11] Cf. Tableau "Lecture dessin 1" en annexe A2b

5.1. Analyse globale

Ci-dessous, nous proposons d'abord une analyse globale sans l'examen des justifications. Cet examen sera fait plus loin.

	Ex 1			Ex 2			Ex 3			Ex 4			Ex 5		
	O	N	O.R	O	N	**O.R**	O	N	**O.R**	O	N	**O.R**	O	N	**O.R**
Sa (29)	22	3	4	1	23	3	9	0	20	9	2	18	13	2	12
Sb (26)	8	3	15	0	14	10	2	4	19	2	2	21	6	1	16
Sc (25)	18	0	7	0	14	11	1	0	24	7	1	16	12	0	13
Sd (23)	10	4	9	0	16	7	6	0	16	5	0	16	9	0	12
Tot(103)	58	10	35	1	67	31	18	4	79	23	5	71	40	3	53

	Ex 6			Ex 7			Ex 8			Ex 9			Ex 10			Ex 11		
	O	**N**	O.R	O	N	**O.R**	**O**	N	O.R	O	N	**O.R**	O	N	**O.R**	O	N	**O.R**
Sa(29)	19	1	9	1	0	28	20	7	0	3	4	21	23	0	5	3	5	19
Sb(26)	17	1	7	4	0	22	13	3	7	4	5	16	13	0	10	3	2	19
Sc(25)	17	4	4	6	0	18	22	2	1	0	1	22	18	0	5	1	0	23
Sd(23)	14	3	3	4	1	17	14	6	2	5	6	12	17	0	6	3	1	16
Tot(103)	67	9	23	15	1	85	69	18	10	12	16	71	71	0	26	10	8	77

Tableau 5 : Analyse globale[12]

Le pourcentage du nombre des réponses "O.R" par rapport au nombre global des réponses est variable, d'un item à un autre, il va de 10% à 85%. Nous pouvons avancer au moins trois explications quant à cette variation :

- elle ne dépend pas que de la nature de l'item
- elle est due à une réticence des élèves à répondre "O.R", une telle réponse étant en opposition avec les clauses du contrat pédagogique relatif au problème.
- Elle est due au fait qu'un élève peut répondre "O.R" avec le sens "Je ne sais pas répondre".

Dans toute notre analyse, les réponses incohérentes ou sans justification seront désignées par la lettre X. Elles sont réparties comme l'indique le tableau ci-dessous :

12 On a eu 991 réponses.
Les réponses correctes sont en gras.

	Ex.1	Ex.2	Ex.3	Ex.4	Ex.5	Ex.6	Ex.7	Ex.8	Ex.9	Ex.10	Ex.11	Tot
Oui (X)	0	0	1	3	6	6	5	6	3	6	2	38
Non (X)	1	7	2	1	0	2	1	2	6	0	1	23
O.R (X)	2	3	6	8	4	4	6	3	10	3	16	65

Tableau 6

Ce tableau montre que le nombre de réponses "on ne peut rien dire" sans justification est faible[13]. On peut donc considérer que les élèves n'ont pas répondu "O.R" avec le sens "Je ne sais pas répondre".

Nous avons voulu que les élèves répondent de façon "spontanée" aux questions posées. Seulement, les enseignants qui ont présenté le questionnaire ont constaté qu'il y a eu retour sur des items, au cours du questionnaire, par certains élèves. A la fin de la séance, il a été demandé aux élèves, de la classe Sa, de signaler s'ils avaient effectué un retour aux questions précédentes.

Sur 26 élèves, 7 ont indiqué qu'ils ont changé d'avis au cours du questionnaire. Par exemple, l'élève B21 a répondu non pour l'exercice 1, en justifiant :

B1 : "Le point I est dans le plan ABC et les points J et K sont dans le plan ACD."

Cette réponse a été effacée[14] et remplacée par une réponse "Oui", accompagnée d'une nouvelle justification :

B1 : "On peut dire aussi que les points I J K sont dans le plan (IJK)"

Le même changement a eu lieu pour l'exercice 8.

Nous pensons que pour d'autres élèves il n'y a pas eu de retour aux questions précédentes, mais que celles-ci ont partiellement influencé leur réponse relative à la suite du questionnaire.

Pour notre analyse nous ne tiendrons pas compte de ces remarques.

Nous proposons de comparer les réponses majoritaires par rapport aux réponses attendues dans l'analyse a priori, pour l'ensemble des items :

	Ex 1			Ex2			Ex3			Ex4			Ex5		
	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R
R.cor															
R. at															
R.maj	**58**	10	35	3	**67**	31	18	4	**79**	23	5	**71**	40	3	**53**

13 65 réponses "O.R" sans justifications sur 561 réponses "O.R".

14 il restait une trace sur la copie.

	Ex 6			Ex 7			Ex 8			Ex 9			Ex 10			Ex 11		
	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R	O	N	O.R
R.cor																		
R. at																		
R.maj	**67**	9	23	15	1	**85**	**69**	18	10	12	16	**71**	**71**	0	26	11	8	**77**

Tableau 7[15]

De ce tableau nous tirons les remarques suivantes :

1) Les réponses majoritaires représentent au moins 70% des réponses, à l'exception des items ex1, ex2 et ex5 où le nombre de réponses majoritaires varie entre 50% et 70 %.

2) les réponses sont conformes à celles attendues uniquement pour les trois items, ex2, ex6 et ex10.

3) Les réponses majoritaires sont celles attendues ou bien celles qui sont correctes. De plus, le pourcentage des réponses ne correspondant ni à celles attendues (R.at) ni à celles qui sont correctes (R.cor), est très faible (entre 1% et 10%) sauf pour les exercices 1 et 6.

Pour mieux comprendre, il est nécessaire d'examiner les justifications. En effet, comme on le verra dans l'analyse ci-dessous, en analysant les justifications, deux réponses différentes, pour un même exercice par deux élèves, peuvent avoir la même origine. De même, certaines réponses justes seront accompagnées de justifications fausses. Cela montre, dans ce cas, que le recueil des données des tableaux est insuffisant pour répondre à nos questions, l'analyse des justifications ne s'en impose que plus .

5.2. Exercices proposant l'étude d'incidence de trois points

Nous constatons une augmentation de bonnes réponses entre l'exercice 1 et l'exercice 8. Et dans chacun de ces deux exercices, au moins un tiers des élèves n'a pas répondu correctement.

	Ex 1			Ex 8		
	Oui	Non	O.R	**Oui**	Non	O.R
Tot	58	10	35	69	18	10

Tableau 8

15 R.cor : réponses justes
R.at : réponses attendue
R.maj : réponses majoritaires

5.2.1. Les justifications utilisées par les élèves

Les justifications avancées par les élèves correspondent à celle de l'analyse préalable
- J1a : "Oui, car trois points définissent un plan"
- J1b : "Oui, car les points I, J et K sont sur la même face ABD".
- J1c : "Oui, car les points I, J et K sont sur le même plan ABD"
- J1d : "Non, car les points I, J et K ne sont pas sur la même face".
- J1e : "Non, car les points I, J et K ne sont pas sur le même plan".
- J1f : "On ne peut rien dire, car on ne sait pas si le point I appartient au plan ACD".
- J1g : "On ne peut rien dire, car il manque des informations".
- J8a : "Oui, car trois points définissent un plan".
- J8b : "Non, car les points A, B et C ne sont pas sur le même plan".
- J8c : "On ne peut rien dire, car le point B peut être dans le plan P contenant A et C".
- J8g : "On ne peut rien dire, car il manque des informations".
- J1x ou J8x : réponses sans justification.

	J8.a	J8.b	J8.c	J8.g	J8.x	Tot
J1.a	50	3	0	1	2	56
J1.b	0	0	0	0	1	1
J1.c	0	0	0	0	0	0
J1.d	0	2	0	0	0	2
J1.e	5	2	0	0	1	8
J1.f	10	5	2	1	3	21
J1.g	2	0	2	0	3	7
J1.x	0	1	1	0	1	3
Tot	67	13	5	2	11	98

Tableau 9

5.2.2. Analyse

Signalons d'abord que la réponse d'un élève présente les critères des deux types de réponses "P" et "Pg". Elle est due à l'élève A6 :
Pour l'exercice 1, il a répondu d'abord "on ne peut rien dire", et ensuite "oui"

Réponse : "Oui"

Justification : " - On ne peut pas voir précisément à quel plan les points K, J et I se rapportent. On ne sait pas si le point K fait partie du plan (ADC) ou (ABD). De même pour les points I et J. Mais les trois points forment un plan donc ils sont sur un même plan.

En revanche pour l'exercice 8, cet élève a répondu "non"

Réponse : "Non"

Justification : Les points A, B et C forment un plan (ABC) mais on voit que B ne fait pas partie du plan P donc ils ne sont pas dans un même plan.

Nous trouvons un cas où l'élève a interprété la question comme si on lui demandait "les trois points appartiennent-ils à l'un des plans représentés ?". Cependant, dans ces deux justifications, l'élève fait référence au fait que trois points définissent un plan, et en même temps il justifie le fait que le point B, de l'exercice 8, n'appartient pas au plan P! Remarquons que dans l'exercice 1, cet élève n'a pas pu décider de l'appartenance des points aux plans définis par les faces du solide, du fait que les trois points se trouvent simultanément à l'intérieur de deux triangles.

Presque la moitié des élèves ont mobilisé la propriété "trois points non alignés définissent un plan" indépendamment de la nature de l'objet.
Cependant, il y a plus de réponses du type "P" pour l'exercice 8 que pour l'exercice 1. Presque toutes les réponses du type "P" pour l'exercice 1 sont du même type pour l'exercice 8 (50 / 56), alors que 17 réponses sont dans ce type pour l'exercice 8 mais d'un autre type pour l'exercice 1. Ces dernières réponses sont accompagnées essentiellement des justifications J1e et J1f qui relèvent de la catégorie "Pg" (cf p.81). Ceci confirme l'importance de la variable "nature de l'objet" et, plus précisément, que l'élève se limite aux plans représentés plus souvent dans le cas où l'objet étudié est un solide que dans les autres cas.

5 élèves ont donné comme justification J8c. Pour eux le plan n'est pas réduit au parallélogramme et/ou au polygone le représentant, comme l'illustre l'exemple suivant :

B1 : Exercice 8

Réponse : "On ne peut rien dire"

Justification : "On ne sait pas à quels plans appartiennent A, B et C. Si A et C appartiennent à P, alors A, B et C sont dans un même plan. Si A et C appartiennent à P et B appartient à P', alors A, B et C ne sont pas dans un même plan : on ne peut donc rien dire."

Pour cet élève, le point B peut être dans le plan P.
Rappelons que plusieurs hypothèses ont été avancées[16] dans l'analyse a priori, pour cette catégorie de réponses. En particulier, il se peut que pour ces élèves, seuls existent les plans représentés ou explicités. Seulement on n'a pas les moyens de le vérifier.

---

16 cf. c), p. 81.

5.2.3. Synthèse

Un élève sur deux a mobilisé la propriété "trois points non alignés définissent un plan" indépendamment de la nature de l'objet. Les élèves se limitent davantage aux plans représentés sur le dessin, plus souvent dans le cas où l'objet étudié est un solide que dans les autres cas.
Seulement 11 élèves ont mobilisé la règle d'interprétation régionnement dans l'espace "int-plan".

5.3. Exercices proposant d'étudier des positions relatives d'une droite et d'un plan

Nous distinguons deux cas selon la variable "nature de l'objet étudié".

5.3.1. Cas où l'objet étudié est un solide

Nous rappelons dans le tableau ci-dessous les résultats globaux pour les exercices de cette catégorie.

	Ex 2			Ex 4			Ex 9			Ex 11		
	Oui	Non	**O.R**	Oui	Non	**O.R**	Oui	Non	**O.R**	Oui	Non	**O.R**
Total	1	67	31	23	5	71	12	16	71	10	8	77

Tableau 10

Il ressort que pour les exercices 4, 9 et 11 plus de 70% des réponses sont justes c'est-à-dire "On ne peut rien dire"; alors que pour l'exercice 2, près de 68% de réponses sont fausses. Deux explications possibles peuvent être avancées :
- La question posée dans l'exercice 2 est de savoir si la droite est parallèle à un plan, alors que dans les autres exercices, il s'agit de savoir si une droite appartient à un plan.
- Le rapport de l'élève avec le dessin a changé au cours du questionnaire, comme nous l'avons dit plus haut.

a) Exercice 2

Nous avons eu d'autres justifications que celles attendues dans l'analyse préalable.
i) Justifications obtenues
J2a : "Non, car d n'est parallèle à aucune droite du plan"
J2b : "Non, car d n'est pas parallèle à la droite (AC)".
J2c : "Non, car d est sécante avec une droite du plan"
J2d : "Non, car d n'est pas orthogonale au plan (CDGH) ..."
J2e : "Non, car ça se voit"

J2f : "Oui, car la droite n'a aucun point commun avec le plan"
J2g: "On ne peut rien dire car on ne sait pas à quel plan appartient la droite"
J2h : "On ne peut rien dire car il n'y a pas de pointillés"
J2i : "On ne peut rien dire car il manque des informations"

ii) Répartition des justifications

	Non								Oui	**O.R**				
	J2a	J2b	J2bc	J2c	J2d	J2e	X	Autres	J2f	J2g	J2h	J2i	X	Autres
Tot	17	11	2	8	1	21	4	3	1	5	2	21	2	1

Tableau 11

iii) Analyse

La catégorie des réponses "autres" correspond au cas où nous n'avons pas pu mettre ces réponses en relation avec nos différentes catégories de justification, essentiellement pour des raisons d'incohérence.
Seulement 6 élèves ont répondu sans justification (réponses X).

a. Elèves ayant répondu "Non"

La majorité des réponses sont conformes à notre attente c'est-à-dire "Non". Parmi eux, 21 élèves ont justifié avec des arguments relevant de l'évidence perceptive.

Elève A29 Réponse : "Non"

Justification : "Non, car si on prolonge la droite et le plan, on voit qu'ils sont sécants, donc (d) n'est pas // à (AECH)"

Justifications J2a et J2b

Ces deux justifications sont des conséquences de la règle d'interprétation "droite-//-plan"[17]. Plus précisément, ces élèves utilisent le fait que si la droite n'est parallèle à aucune droite du plan elle n'est pas parallèle au plan P.

Par exemple,

Elève A2 : Réponse : "Non"

Justification : "Une droite d est parallèle à un plan AECH si et seulement si cette droite est parallèle à une droite de ce plan. Or d n'est parallèle à aucune droite du plan AECH. Elle est donc sécante au plan AECH"

---

17 Conjecture 2 (Cf. 1.2 Positions relatives d'une droite avec plan p.4)

Cette interprétation consiste à examiner le parallélisme de la droite d avec une droite du plan P. Remarquons que cet examen se fait par la règle d'interprétation "droite-//-droite"[18] ou "droite-sec-droite"[19]

Contrairement au cas J2a, les justifications J2b explicitent une droite du plan en privilégiant les droites verticales comme (AC) et (EH).

Justification J2c

Cette justification est fondée sur une argumentation correcte à savoir, si une droite d est sécante avec une droite d'un plan P, alors d est aussi sécante avec ce plan. Seulement, ces élèves utilisent la règle d'interprétation "droite-sec-droite" pour justifier que d est sécante avec une droite du plan !

Justification J2b-c

Ces deux élèves ont justifié par le fait que d devrait être parallèle à la droite (AC) et qu'elle est sécante avec une droite du plan.

Par exemple,

Elève A19, Réponse : "Non"

Justification :Si on prolonge (CH), elle coupera (d). Mais si on prolonge (AE), elle ne coupera pas (d). Ainsi (d) n'est pas parallèle à AECH car elle coupe (CH) qui appartient au plan AECH. Pour que (d) soit // à AECH il faudrait qu'elle soit // à (AC). Or dans un dessin en perspective les parallèles sont toujours respectées et ici on voit que (d) n'est pas parallèle à (AC).

Ou encore,

Elève B19, Réponse : "Non"

Justification : Car la droite d va couper (CH).

d devrait être parallèle à (AC).

Or toute parallèle à la droite (AC) est sécante avec (CH), donc que faut-il en déduire dans le cas où d est parallèle à (AC) ?

b. Elèves ayant répondu "Oui"

Un seul élève a répondu "oui" :

Elève A 23, Réponse : "Oui"

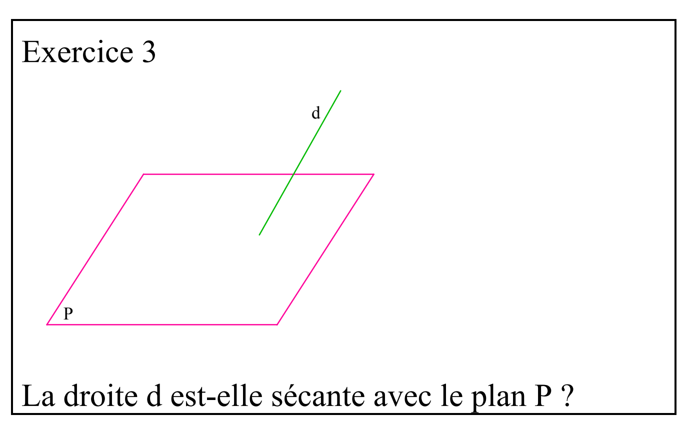
Justification : Une droite est parallèle à un plan si elle n'a aucun point commun avec ce plan"

---

18 cf. Position relative de deux droites, p.76

19 Conjecture 5 (cf. Position relative de deux droites, p.76)

On peut interpréter cette justification par le fait que : "si le segment est à l'extérieur du polygone représentant le plan, alors il n'y a pas d'intersection entre la droite et le plan et donc ils sont parallèles".
Seulement, pour cet élève le plan n'est pas limité au polygone le représentant. En effet, il a répondu "oui" pour les exercices 4, 9 et 11, en justifiant par le fait que le plan est illimité. De plus pour l'exercice 3, il a répondu "On ne peut rien dire"



Ceci montre que les interprétations faites par cet élève ne sont pas "interprétation droite-sec-plan"[20]
Il reste une possibilité d'interprétation, celle que nous avons appelé "droite-ext-plan" qui caractérise une droite non sécante à un plan par l'absence de pointillé.

c. Elèves ayant répondu "On ne peut rien dire"
Ces élèves ont justifié essentiellement par le fait qu'il manque des informations. Notons que 5 élèves n'ont pas pu conclure car pour cela ils auraient eu besoin de savoir à quel plan appartient la droite d (J2g).

b) Exercices 4, 9 et 11

La proportion de réponses "Oui" est plus importante pour l'exercice 4 que pour les deux autres exercices.

i) <u>Les justifications utilisées par les élèves</u>

- Justifications utilisées exclusivement dans les réponses "Oui" :

Ja : "Oui, car la droite d est sécante avec deux droites du plan, (AC) et (CD) par exemple.
Jb : "Oui car le plan est illimité"
Jc : "Oui, car la droite d n'est pas parallèle au plan"

---

20 Conjecture 4 (cf. Position relative d'une droite par rapport à un plan, p. 75)

- Justifications utilisées exclusivement dans les réponses "Non" :
Jd : "Non, car d est parallèle au plan"
Je : "Non, car d est sécante avec le plan"

- Justifications utilisées exclusivement dans les réponses "On ne peut rien dire" :
Jf : "OR, car deux cas se présentent, être parallèles ou être dans le plan"
Jg : "OR, car d peut être dans le plan (ABCD) ou (CDGH)"
Jh : "OR, car deux cas se présentent, être sécante ou être dans le plan"
Ji : " OR, car on ne sait pas à quel plan appartient la droite d"
Jj : "Manque d'informations"

- Justifications utilisées dans les différentes réponses :
Jk : "Absence de marques"
Jl : "évident"

- Justifications utilisées de façon minoritaire :
Autres justifications :
div1 : "On ne peut rien dire, car on ne sait pas si d est sécante avec une droite du plan"
div2 : "Non, car d est sécante avec une droite du plan (CD).
div3 : "Non, car d est sécante avec (CH) et le point d'intersection n'appartient pas au plan"
div4 : "Non, car d est dans le plan (CDGH)"
div5 : "Non, car d n'a aucun point commun avec le cube".
div6 : "On ne peut rien dire car d est sécante avec (CD) mais il manque d'informations"

Ces justifications sont réparties de la façon suivante par rapport aux exercices :

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Classe Sa	14	2	0	2	0	18	4	3	0	21	4	0
Classe Sb	0	2	3	4	1	19	2	3	2	17	3	3
Classe Sc	5	0	1	0	0	16	1	2	1	17	16	1
Classe Sd	4	0	0	0	0	13	0	0	2	12	1	4

Tableau 12

	Oui						Non					O.R								
	a	b	c	k	l	x	d	e	k	l	x	f	g	h	i	j	x	k	l	div
Ex4	16	0	1	2	1	3	1	0	2	0	0	42	0	1	2	11	5	6	0	0
Ex9	3	2	2	0	3	3	2	2	1	1	3	12	6	3	2	29	8	7	0	6
Ex11	2	2	1	0	3	2	3	0	1	1	1	17	1	5	1	28	14	5	0	3
Tot	21	4	4	2	7	8	6	2	4	2	4	71	7	9	5	68	27	18	0	9

Tableau 13

ii) Analyse

Nous proposons d'analyser les justifications les plus fréquentes.

a. Justifications "Manque d'informations" (Jj)

Nous avons considéré dans cette catégorie seulement les réponses des élèves qui indiquent qu'il manque des données, ou qu'ils explicitent les différents cas. Donc, c'est le type de justification correcte.

Il ressort donc, malgré un taux de réponse "On ne peut rien dire" assez élevé (70%) pour les exercices 9 et 11, seulement 30% ont des justifications justes.

b. Justifications Jf

L'ensemble de ces justifications est basé sur le fait que pour les élèves "la droite d est parallèle au plan (ABCD) ou incluse dans ce plan".

Tous ces élèves, en explicitant cette règle, ont conclu qu'on "ne peut rien déduire"

> Elève A2 réponse : "On ne peut rien dire"
>
> Justification : Nous pouvons dire que la droite d est parallèle au plan ABCD mais nous ne pouvons pas dire si oui ou non d est dans le plan ABCD.

Nous constatons également, qu'elle a été plus mobilisée pour l'exercice 4 que pour les autres exercices. Nous expliquons cette différence par le fait que dans l'exercice 4 la représentation de la droite a une partie à l'intérieur du carré ABCD, ce qui n'est pas le cas pour les autres exercices.

c. Justifications Jk

L'absence des marques ou des pointillés a permis à des élèves de conclure sur l'intersection de deux droites ou d'une droite et d'un plan. Dans cette catégorie nous n'avons considéré que les élèves ayant explicité qu'il manquait des marques.

- Pour certains élèves, l'absence de marque du type (fig. 32), indiquant d'après la convention (droites non sécantes) que les deux droites, dont les représentations sont sécantes, ne sont pas sécantes, permet de conclure que les droites sont sécantes. Par exemple, pour l'exercice 4, on déduit que la droite d est sécante avec les droites (AC) et (CD) et donc d est incluse dans le plan (ABCD).

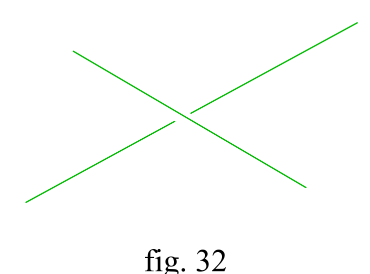


fig. 32

Cette justification est apparue essentiellement dans une seule classe (Classe Sc) (Tableau 12). Il se trouve que dans cette classe l'enseignant a utilisé cette convention pour montrer que deux droites ne sont pas sécantes. Cette convention a été explicitée par cet enseignant alors que cela n' a pas été le cas des autres enseignants :

> Enseignant C : "je leur ai toujours dit que si on met un blanc avant et après alors les droites ne sont pas sécantes et dans l'autre cas elle le sont." 21

Même si cet enseignant a utilisé cette convention pour lever l'ambiguïté quant à l'intersection de deux droites, d'une part celle-ci n'a pas été utilisée par l'ensemble des élèves et d'autre part on peut se demander comment l'élève utilise cette convention lorsqu'il est amené à réaliser la construction à partir d'un problème. Pour illustrer cette remarque, considérons le cas de l'élève C3 :

Il a répondu "oui" pour l'exercice 4:

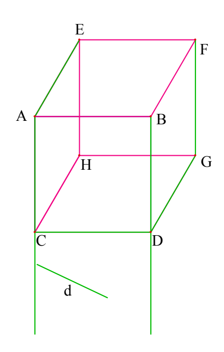
> Justification : "D'après le dessin. Si d n'appartient pas à ABCD il y aurait un espace blanc à l'endroit des intersections"

pour l'exercice 9, il a prolongé les droites (AC) et (BD) et n'obtenant pas d'intersection avec la droite d, il a conclu "On ne peut rien dire" :

> Justification : car on n'a aucune précision sur cette droite. Elle peut aussi appartenir au plan (HGDC).

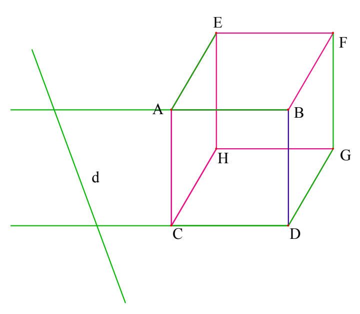
---

21 Propos recueillis oralement.



Enfin, pour l'exercice 11, il a prolongé les droites (AB) et (CD) et ayant un point d'intersection avec la droite d, il répond "Oui" :

Justification "D'après le dessin".



- Pour l'exercice 4, deux élèves ont répondu que la droite d est dans le plan (ABCD), en justifiant leur réponse par l'absence des pointillés. Car si la droite d n'est pas dans le plan ABCD alors elle devrait lui être sécante. Ces élèves n'ont pas envisagé le cas où la droite peut être parallèle au plan (ABCD) à moins que, pour eux, le plan ABCD ne soit confondu avec le plan de la feuille et que par conséquent la droite ne puisse être que "derrière" ce plan comme l'a explicité l'élève A8 :

Elève A8 réponse : "Oui"

Justification : Oui, car si elle n'avait pas été dans le plan ABCD, la partie coupant le cube aurait été en pointillé signifiant qu'elle n'est pas visible en réalité car elle se trouve derrière le plan ABCD.

d. Justifications Ja

Utilisées en majorité dans l'exercice 4.

Les élèves explicitent que d est sécante avec deux droites du plan ABCD, en citant souvent les droites (AC) et (CD). Nous pensons que pour beaucoup d'élèves c'est l'absence de "marques" qui induit cette réponse.

e. Justification Jg

Cette justification est apparue essentiellement dans l'exercice 9. Elle montre que les élèves n'ont considéré que deux plans définis par les faces du cube en privilégiant la

face "horizontale inférieure" et la face "verticale supérieure". Nous pensons que c'est la position de la représentation de la droite qui a fait émerger ces réponses.

f. Justification Je

Deux élèves ont justifié leur réponses par le fait que la droite d est sécante avec le plan ABCD.

- L'élève A29, précise qu'elle n'est pas parallèle au plan, ce qui permet de conclure.

> Elève A29 réponse : "Non"
>
> Justification : Non, car elle n'est pas parallèle au plan ABCD mais elle y est sécante.

Ici deux éléments sont en jeu de façon complémentaires : la perception de l'élève et d n'est parallèle à aucune droite du plan représenté.

- Pour l'élève B13, la droite d n'est pas dans le plan ABCD donc elle lui est sécante.

> Elève B13 réponse : "Non"
>
> Justification : Non, la droite d n'est pas dans le plan mais par contre, on peut dire qu'elle est sécante au plan ABCD..

Nous pouvons nous demander si pour cet élève la droite d est dans le plan (CDGH).

g. Justifications Jd

Pour les élèves, deux possibilités se présentent : la droite d est parallèle au plan ou incluse dans ce plan.

Nous pensons que le cas "être sécante" n'a pas été envisagé à cause de l'absence des pointillés. De plus l'absence des marques indiquant l'intersection de d avec deux droites du plan fait que les élèves concluent au parallélisme de d avec le plan (ABCD).

h. Autres justifications

Ces justifications sont minoritaires (Tableau 14). Trois justifications, div2, div3 et div6, considèrent que la droite d est sécante avec la droite (CD) ou (CH), pour les exercices 9 et 11.

- Justification div2 : pour les élèves qui l'ont donnée, la droite d est incluse dans le plan (CDGH) de l'exercice 9.
- Justification div3 : elle concerne un seul élève qui a fait un raisonnemnt par absurde dans le cas de l'exercice 11 : si on suppose que la droite d est dans le plan ABCD, alors le point d'intersection de d avec la droite (CH) doit être sur le plan ABCD.

> Elève A6 réponse: Non
>
> Justification : le droite d n'appartient pas au plan ABCD car si elle lui appartenait, en prolongeant la droite (CH) vers C, elle couperait la droite d au même niveau que la plan ABCD.

On peut faire deux remarques :

- L'élève considère d et (CH) comme sécantes. Comme elles ne sont pas coplanaires, puisque d est dans le plan (ABCD) selon l'hypothèse, il ne peut déduire que d est sécante avec (CH) que par la règle d'interprétation "droite-sec-droite"[22]. On voit d'ailleurs, que sur le dessin l'élève a prolongé la droite (CH).

- Etant donné que la droite (CH) n'a qu'un point d'intersection avec le plan (ABCD), le point d'intersection de d avec la droite (CH) n'appartient pas au plan (ABCD) puisqu'il est distinct de C.

	Ex4	EX9	Ex11
div1	0	1	1
div2	0	2	2
div3	0	0	1
div4	0	1	1
div5	0	1	2
div6	0	1	2

Tableau 14

- Justification div6 : Pour les élèves ayant produit cette justification, la droite d est sécante avec (CD). Par exemple, l'élève C1 a prolongé les droites d et (CH) (fig. 33), ce qui lui permet de conclure que d a un point commun avec le plan (ABCD).

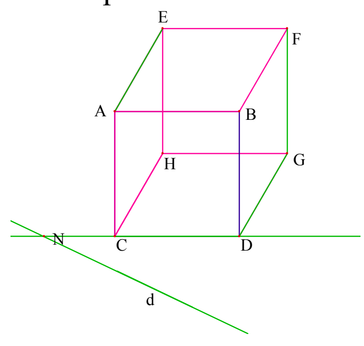


fig. 33

Mais, l'élève ne sait pas si la droite a d'autres points communs avec le plan.

Elève C1 réponse: On ne peut rien dire

Justification : d est sécante avec la droite (CD) en N. La droite d a donc un point commun avec le plan (ABCD). Cependant, on ne peut pas dire si elle en a d'autres !. Elle peut par exemple appartenir au plan (CDGH), elle peut aussi appartenir à aucun plan du cube.

22 Conjecture 5 (cf. Position relative de deux droites, p.76)

On voit dans cet exemple, un raisonnement cohérent d'un point de vue logique géométrique, à part que le fait d est sécante avec la droite (CD) a été déduit du dessin, par la règle d'interprétation "droite-sec-droite".

- Justification div4 : la position de la droite d par rapport au cube, dans l'exercice 9, induit que la droite est incluse dans le plan (CDGH). Nous avons rencontré cette interprétation dans d'autres justifications.

5.3.2. Cas où les objets étudiés ne sont pas des solides

Il s'agit des exercices 3, 5 et 10 dont les résultats sont rappelés dans le tableau ci-dessous:

	Ex 3			Ex 5			Ex10		
	Oui	Non	**O.R**	Oui	Non	**O.R**	Oui	Non	**O.R**
Total	18	4	79	38	3	53	71	0	26

Tableau 15

a) Exercice 3

i) <u>Justifications obtenues</u>
J3a - "Car la droite a un point qui appartient au plan P"
J3b - "Car elle coupe P"
J3c - "Car d n'est parallèle à aucune droite de P" ou "car d n'est pas parallèle à P"
J3d - "On le voit bien"
J3e - "Absence de pointillés. Il faut prolonger pour voir. Il faut mettre en évidence l'intersection"
J3f - "Manque de renseignement"
J3g - "d peut être parallèle à P" (13 élèves)
J3h - "On ne connaît pas le degré de la pente de d" (2 élèves)
J3i - "Il faut savoir à quel plan appartient la droite d" (3 élèves)

Ces justifications sont réparties de la façon suivante

	Oui					Non	O.R					
	J3a	J3b	J3c	J3d	X	J3e	J3e	J3f	J3g	J3h	J3i	X
Tot	4	7	3	3	1	4	16	31	13	2	3	14

Tableau 16

ii) Elèves ayant répondu "On ne peut rien dire"

Même si près de 80% de réponses sont "On ne peut rien dire", les élèves ont utilisé certaines règles implicites du dessin. En effet, 6 types de justification pour les réponses "on ne peut rien dire" ont été utilisés par les élèves.

- Justifications J3e :

Ces justifications font appel à des conventions de représentation de l'intersection d'une droite et d'un plan. Leur absence indique qu'on ne peut pas conclure :

> Elève A8 : "On ne peut rien dire"
>
> Justification : "On ne peut rien dire car si la droite était sécante avec P nous devrions voir le point d'intersection et la continuation de d, en tiret, derrière le plan. Or ici d n'est pas continuée alors on ne peut rien dire si elle est sécante ou parallèle.

- Justifications J3f

Les élèves ont justifié par le fait que tous les cas peuvent se présenter et qu'on ne peut rien déduire.

- Justifications J3g

Nous pensons que l'apparition de cette justification est due au fait que la droite d est "presque" parallèle à un côté du parallélogramme.

iii) Les élèves ayant répondu "Oui"

- Justifications J3a

Cette justification renvoie à la règle d'interprétation "droite-sec-plan".

- Justifications J3b

Cette justification utilise d'une part un résultat géométrique : une droite est soit parallèle[23] à un plan soit elle est sécante à ce plan. D'autre part, la justification que d n'est pas parallèle à P utilise la règle d'interprétation "droite-//-plan"[24].

iv) Les élèves ayant répondu "Non"

Les 4 élèves ayant répondu "non" ont justifié leur réponses par l'absence de pointillé.

b) Exercice 5

i) Justifications utilisées

J5a - "Oui, car A et B sont de part et d'autre du plan P"

J5b - "Oui, car (AB) n'est pas parallèle à P"

---

23 parallèle ou incluse

24 Conjecture 2

J5c - "Oui, car (AB) traverse P".
J5d - "Oui, car si on prolonge P, alors la droite est sécante"
J5e - "oui, car on le voit"
J5f : "On ne peut rien dire, car il manque des renseignements"
J5g : "On ne peut rien dire, car la droite (AB) peut être sécante ou parallèle à P "
J5h : "On ne peut rien dire, car la droite (AB) peut être sécante à P ou incluse dans P"
J5i : "On ne peut rien dire, car il n'y a pas de pointillés"
J5j : "On ne peut rien dire, car on ne connaît pas la position de A"
J5k : "On ne peut rien dire, car on ne connaît pas la position de B"
J5l : "On ne peut rien dire, car la droite (AB) n'est pas tracée"
X: réponse sans justification

	Oui						Non	OR							
	J5a	J5b	J5c	J5d	J5e	X	diva	J5f	J5g	J5h	J5i	J5j	J5k	J5l	X
Tot	10	8	3	6	2	11	3	26	14	2	4	1	1	1	4

Tableau 17

ii) <u>Les élèves ayant répondu "Oui"</u>

- Justifications J5a :

Certains élèves ont formulé par "A est au dessus de P et B au dessous de P".

Ces justifications s'inscrivent dans ce que nous avons appelé interprétation "au dessus / au dessous"[25]. La justification produite par l'élève A6 montre que le résultat reste le même pour d'autres positions des points A et B pourvu qu'ils restent dans des régions du plan que l'élève caractérise par "ne pas être du même côté".

> Elève A6 : "oui"
>
> Justification : La droite (AB) est sécante avec le plan P car les points A et B sont placés des deux côtés du plan. Donc quelque soit leur position, la droite (AB) est sécante avec le plan P.

- Justifications J5b :

On pense que pour les élèves ayant donné ces justifications "la droite d n'est pas parallèle au plan" car la représentation de la droite (AB) est parallèle à aucun coté du parallélogramme (règle d'interprétation "droite-//-plan").

25 Conjecture 2 (cf. 1.1. Régionnement de l'espace, p.3)

Les justifications "A et B sont de part et d'autre du plan P", "Car (AB) traverse P" et "Si on prolonge P" alors la droite est sécante" sont des conséquences du régionnement du plan "au dessus/au dessous" (19 élèves sont concernés).

iii) <u>Les élèves ayant répondu "Non"</u>
Nous analyserons ci-dessous chacune des réponses de ces trois élèves.

En prolongeant les cotés "obliques" du parallélogramme, l'élève A9 constate que le point B est à l'intérieur de la bande définie par ces deux droites (fig. 34). Donc, pour lui le point A est au dessus du plan et par le raisonnement ci-dessus il conclut que B l'est aussi et que par conséquent (AB) n'est pas sécante avec le plan.

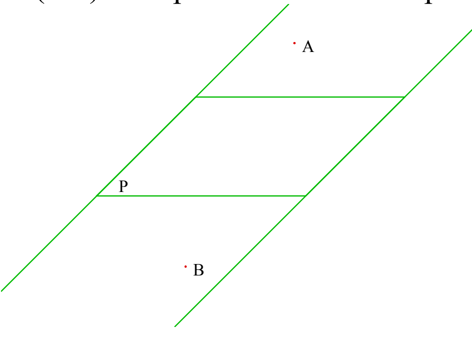


fig. 34

Elève A9 : réponse : "Non"

Justification : Non, car si l'on prolonge les arêtes (droite et gauche) elles encadrent B qui alors, est supérieur au plan.

Les points A et B ont été considérés par l'élève A21 comme des points du plan P:

Elève A21 : réponse : "Non"

Justification : Non, car A et B appartiennent tous les deux au plan P.

L'élève B26, trace le segment [AB] (fig. 35) et conclut que la droite (AB) n'est pas sécante avec le plan car il n'y a pas de pointillés!

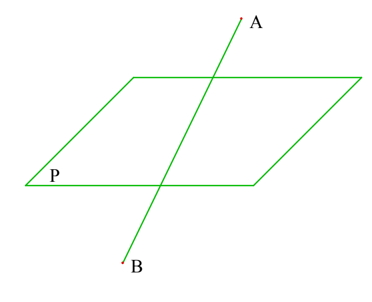


fig. 35

Elève B26 : réponse : "Non"

Justification : Non, car si elle était sécante on ne la verrait pas toute entière"

iv) Les élèves ayant répondu " on ne peut rien dire "

La moitié des réponses "On ne peut rien dire" sont justifiées par le manque d'informations. Pour 14 élèves la droite (AB) est soit sécante soit parallèle au plan P. Dans ce dernier cas on ne sait pas si les élèves la voient "au dessus" ou "au dessous" du plan. D'ailleurs un élève a indiqué qu'il ne connaissait pas la position du point A alors que pour un autre élève c'est la position du point B qu'il ne connaissait pas.

L'absence des pointillés n'a pas permis à 4 élèves de conclure.

c) Exercice 10

i) Justifications utilisées

J10 a : "Oui, car la droite est parallèle à une droite du plan"

J10 b : " Oui, car la droite d n'est pas sécante avec P"

J10 c : " Oui, car d est parallèle ou confondue avec P"

J10 d : "ça se voit"

J10e : " Oui, car la droite d est horizontale"

J10f : " Oui, car une droite parallèle est représentée par une droite parallèle"

J10 g : "On ne peut rien dire, car elle peut être incluse dans le plan"

J10h : "On ne peut rien dire, car il manque des indications"

J10i : "On ne peut rien dire, car il faudrait dessiner le plan contenant d et orthogonal à P"

J10j : "On ne peut rien dire, car il faut que la droite soit dans le plan"

	Oui							O.R				
	J10a	J10b	J10c	J10d	J10e	J10f	X	J10g	J10h	J10i	J10j	X
Tot	35	12	2	9	1	1	11	5	7	1	1	8

Tableau 18

ii) Elèves ayant répondu "Oui"

La majorité des réponses sont du type J10a ou J10b.

Certains élèves ayant justifié par J10a ont précisé que la droite d est parallèle à deux droites de P. Ces droites de P sont désignées par certains comme des bords du plan :

Elève A16 : "oui"

Justification : "D'après la figure en perspective, d est parallèle à deux des bords du plan P. Comme une droite parallèle à une autre droite d'un plan est parallèle à ce même plan, d// à P."

Pour les justifications J10b aucun élève n'a justifié pourquoi d n'est pas sécante avec P, si ce n'est que certains ont précisé qu'il n'y a pas de point d'intersection.

iii) Elèves ayant répondu "On ne peut rien dire"

Les réponses du type J10g devraient être considérées comme les précédentes, puisque nous pensons que l'inclusion possible de d dans P, était établie par le fait que le segment représentant d est parallèle à un côté du parallélogramme représentant P.

5.3.3. Synthèse

Bien que le nombre de réponses justes, "on ne peut rien dire", soit important dans le cas des exercices 3, 4, 5, 9 et 11, le nombre de justifications justes ne dépasse pas 30%.

Nous avons montré que la variable "solide" a privilégié des lectures spécifiques du dessin. En effet :

- La majorité des justifications sont fondées sur une interprétation selon laquelle la droite d est soit parallèle au plan (ABCD) soit incluse dans ce plan.
- Certains élèves ont considéré que la droite d, de l'exercice 9, peut être dans les plans (ABCD) ou (CDGH).
- Le régionnement de l'espace par le cube a été mis en évidence par le fait que les élèves n'ont pas utilisé les mêmes justifications pour les exercices 4, 9 et 11, alors que la seule différence entre ces exercices est la position de la droite d par rapport au cube.

L'interprétation "droite-//-plan" concernant le parallélisme d'une droite avec un plan est la plus utilisée par les élèves. Cette règle a permis de justifier qu'une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est parallèle à un segment de celui-ci, et aussi de justifier qu'elle n'est pas parallèle à un plan lorsque sur la représentation elle n'est parallèle à aucun segment de ce plan.

Dans le cas des exercices où nous avons proposé des solides, les élèves ont considéré que la droite d était soit parallèle au plan (ABCD) soit incluse dans ce plan. En particulier, pour l'exercice 4, 42 élèves ont utilisé cette justification[26]. Or, la droite d n'est parallèle à aucune droite du plan (ABCD). Donc, c'est l'objet solide, ici le cube, qui a induit cette lecture.

La règle d'interprétation "droite-sec-plan" a été mobilisée seulement par 4 élèves pour l'exercice 3. 47% des élèves ont répondu qu'il manquait des informations. Parmi eux, 16% ont précisé que l'absence de pointillés ne permet pas de conclure. Il faut ajouter à ces derniers 4% d'élèves qui ont répondu "non" en justifiant par l'absence des pointillés.

---

26 Cette justification a été utilisée par 12 élèves pour l'exercice 9 et 17 élèves pour l'exercice 11.

De même dans le cas des exercices 4, 9 et 11, plusieurs élèves ont écarté le cas "d sécante avec un plan" parce qu'il n'y a pas de pointillés.
Dans le test de B. Parzysz, environ 29% d'élèves avaient répondu "oui". Nous avons attribué ce faible résultat en partie au fait que l'interprétation peut se faire en référence avec une droite où il y aurait des ponctuations à l'endroit de l'intersection. Dans notre questionnaire nous n'avons proposé qu'une seule droite et le nombre de réponses "oui" est beaucoup plus faible (4%). Nous pensons que ce "faible" score peut être expliqué en partie par le fait que la représentation de la droite est presque parallèle à un côté du parallélogramme représentant le plan, comme nous l'avons déjà souligné.
Néanmoins, nous pouvons conclure que cette règle d'interprétation n'est pas mobilisée par beaucoup d'élèves ce qui peut s'expliquer essentiellement par l'absence des pointillés utilisés normalement dans la convention de représentation d'une droite sécante avec un plan.
Nous avons aussi montré que certains élèves d'une même classe ont utilisé les mêmes arguments, alors qu'ils ne l'ont pas été par les élèves des autres classes. Les arguments sont fondés sur l'absence des marques indiquant s'il y a ou non une intersection.
Enfin, toutes les règles d'interprétation concernant les positions relatives d'une droite et d'un plan, ont été utilisées par les élèves selon des proportions variables.

5.4. Exercices proposant l'étude des positions relatives de deux droites

Les résultats relatifs aux exercices 6 et 7 sont présentés dans le tableau ci-dessous

	Ex 6			Ex 7		
	Oui	**Non**	O.R	Oui	Non	**O.R**
Tot	67	9	23	15	1	85

Tableau 19

La réponse majoritaire pour l'exercice 6 est "oui" et celle pour l'exercice 7 elle est "on ne peut rien dire".
Dans un premier temps nous allons donner les justifications codées utilisées par les élèves dans le cas des exercices 6 et 7. Ensuite nous examinerons les réponses dominantes pour ces deux exercices.
Nous avons codé les justifications par deux lettres et un chiffre : la première lettre est J, désignant "justification". La deuxième est O pour les réponses "oui", N pour les réponses "non", R pour les réponses "on ne peut rien dire". Enfin, un chiffre numérote les justifications.

5.4.1. Les justifications utilisées par les élèves

a) Les justifications utilisées pour les réponses "oui"

- **JO1** : d et d' sont sécantes car elles sont incluses dans deux plans sécants.
Certains élèves ont justifié que les plans (SAB) et SCD) sont sécants.

Elève A10 : "oui"

Justification : "Les plans (SAB) et (SCD) qui soutiennent d et d' ne sont pas parallèles, ni confondus, elles sont donc obligatoirement sécantes, puisqu'elles font partie de ces plans."

- **JO2** : En prolongeant les droites, on voit qu'elles sont sécantes.
A priori nous pensons qu'un élève ayant utilisé cette justification doit répondre "oui" pour l'exercice 7.
- **JO3** : d et d' sont sécantes car elles ne sont pas parallèles.
- **JO4** : Absence de marques
- **JO5** : ça se voit

b) Les justifications utilisées pour les réponses "non"

- **JN1** : d et d' ne sont pas dans un même plan.
Cette justification a été utilisée essentiellement pour l'exercice 6. Ici, être dans un même plan, signifie, être dans la même face.
- **JN2** : Les plans ne sont pas sécants.
Nous pensons que pour ces élèves, comme les faces SAB et SCD n'ont pas d'arête commune, alors les droites d et d' ne peuvent pas être sécantes.
- **JN3** : d et d' ne sont pas sécantes car leurs intersections respectives avec la droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD) sont distinctes.
La justification JN3, est celle que nous avons considérée comme correcte pour l'exercice 6. Seulement 3 élèves l'ont utilisée [27]. Pour deux élèves les droites d et d' ne sont pas sécantes car leur point d'intersection sur le dessin n'appartient pas à la droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD).

> Elève C24 : "Non"
>
> Justification : Soit Δ la droite d'intersection de (ASB) et (SDC). D et d' ne sont pas sécantes selon Δ donc d et d' ne sont pas s sécantes.

Pour l'élève C25, les droites ne sont pas sécantes car elles sont sécantes, avec la droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD), en deux points distincts.

> Elève C25 : "Non"
>
> Justification : SDC et BAS se coupent selon (SE) or d' et d coupent cette droite en 2 points différents.

---

27 Nous verrons dans la suite que c'est le type d'exercices qu'on trouve dans les manuels de l'enseignement actuels et que, plus précisément, pour ces exercices, il est possible de répondre en réalisant des tracés sur le dessin.

Les trois élèves ont réalisé les tracés nécessaires.

c) Les justifications utilisées pour les réponses "on ne peut rien dire"

- **JR1** : Il manque des informations.
Trois élèves ont distingué de façon explicite la différence entre ce qu'on peut voir sur le dessin et ce qu'il en est dans l'espace, comme le cas de l'élève B18:

Elève B18 : "On ne peut rien dire"

Justification : " Sur le dessin les deux droites sont sécantes mais dans l'espace cela dépend des fois. Donc je pense qu'il faudrait avoir plus de précision.

Certains ont explicité la nature d'informations manquantes. Nous avons mis dans cette catégorie toutes les justifications indiquant des manques d'indications qui ne relèvent pas des propriétés géométriques d'incidence.
Les types d'informations manquantes ne sont pas de même nature pour les exercices 6 et 7. En effet, pour l'exercices 6, on peut relever : "il faut voir si d et d' ont la même pente"; "on ne sait pas si elles sont à la même hauteur dans leurs plans respectifs". Alors que pour l'exercice 7, on peut noter : "il faut voir s'il existe un espace entre d et d'"; "on ne sait pas si d et d' sont dans deux plans parallèles ou confondus"; "on ne connaît pas la profondeur" ...
- **JR2** : Il faut savoir si d et d' sont coplanaires.
Cette justification a été utilisée dans les deux exercices 6 et 7.

5.4.2. Analyse comparée des justifications utilisées pour les exercices 6 et 7

Le tableau ci-dessous donne la répartition des réponses[28] des élèves sous la forme (a , b) où a et b représentent respectivement le type de réponse pour l'exercice 6 et 7.

		Ex 7		
		Oui	Non	O.R
Ex 6	Oui	10	0	55
	Non	3	1	5
	O.R	2	0	21

Tableau 20

Un premier renseignement donné par le tableau est que la majorité des réponses se trouvent dans l'une des cases correspondant à : (Oui , O.R); (O.R , O.R) et (Oui , Oui).

28 Deux élèves ayant répondu respectivement "oui pour l'exercice 6 et sans réponse pour l'exercice 7" et "sans réponse pour l'exercice 6 et O.R pour l'exercice 7" n'ont pas été pris en compte dans ce tableau.

Aussi dans le tableau ci-dessous, nous avons présenté les justifications utilisées par les élèves dans le cas des exercices 6 et 7, en considérant uniquement les réponses "Oui" et "On ne peut rien dire".

		Ex 7				
		JO3	JO4	JO5	JR1	JR2
Ex 6	JO1	0	5	1	30	11
	JO2	0	0	0	7	0
	JO3	1	0	0	0	0
	JR1	0	0	0	6	3
	JR2	0	1	0	5	6

Tableau 21

Dans ce qui suit nous analyserons les différentes justifications utilisées en ce qui concerne l'exercice 6 et nous examinerons pour chaque cas les justifications pour l'exercice 7. Dans la suite, on utilisera la notation (a , b) où a et b représentent respectivement les types de justification pour les exercices 6 et 7. Seuls les cas les plus fréquents seront analysés.

i) Cas des justifications JO2 en ce qui concerne l'exercice 6

Dans le paragraphe 5.4.1.a., ci dessus, nous avons supposé qu'un élève ayant répondu "oui" à l'exercice 6 en donnant la justification JO2 (en prolongeant les droites, on voit qu'elles sont sécantes) devrait répondre "oui" à la question 7. Or il ressort que tous ceux qui ont justifié par JO2 dans le cas de l'exercice 6 ont répondu "On ne peut rien dire" dans le cas de l'exercice 7 avec la justification JR1. Dans ce cas on peut se demander quel est le type d'information qui manque.

Trois élèves (B4, A20 et D18) ont indiqué que "d peut être au dessus ou au dessous de d'". Ces élèves ont expliqué oralement et en montrant avec leur doigt que d et d' peuvent appartenir respectivement à deux plans strictement parallèles sans qu'elles soit parallèles. Cette explication a été avancée par l'élève B12 qui avait indiqué sur la feuille :"On sait pas s'il y a un espace entre les deux". Ce qui met en évidence une règle d'interprétation concernant les positions relatives de deux droites dans l'espace chez ces élèves :

Si deux segments représentant deux droites d et d', sont sécants, et si on sait que ces deux droites sont dans deux plans sécants, alors d et d' sont sécantes.

Dans cette règle on ne précise pas si l'hypothèse "*ces deux droites sont dans deux plans sécants"* doit être donnée dans l'énoncé comme c'est le cas de l'exercice 6. Sinon, on renvoie au problème d'interprétation des positions relatives d'une droite et d'un plan.

Deux autres élèves (de la classe B) ont argumenté respectivement par : "Sur le dessin les droites sont sécantes mais dans l'espace cela dépend des fois." et "Elles peuvent très bien ne pas avoir de points en commun dans l'espace." Pour ces élèves nous ne disposons pas d'autres précisions.

ii) Cas des justification JO1 en ce qui concerne l'exercice 6

On peut penser que ces élèves ont utilisé une règle d'interprétation, qui est une variante de la précédente. En fait nous avançons l'hypothèse que leur justification est basée sur un théorème en acte :

Si deux droites sont incluses respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont sécantes.

En effet, contrairement au cas précédent nous avons relevé dans les productions que :

- tous les élèves, sauf un, ont conclu sans tracer des prolongements aux droites d et d', sauf un. Notons que 5 élèves ont réalisé des tracés pour justifier que les plans (SAB) et (SCD) sont sécants.
- La majorité des élèves ont justifié le fait que les plans (SAB) et (SCD) sont sécants, soit en construisant leur intersection, soit en argumentant que les deux plans ne sont pas parallèles, et/ou ils ont un point commun S.

Remarquons que ce théorème en acte a probablement été utilisé par les élèves utilisant la première catégorie de justification analysée ci-dessus. Seulement nous n'avons pas les moyens de le confirmer comme dans la deuxième cas.

41 élèves ayant utilisé la justifation JO1pour l'exercice 6 ont répondu "on ne peut rien dire" pour l'exercice 7. Les justifications avancées sont JR1 (30 élèves) ou JR2 (11 élèves). Seulement 6 ont répondu par "oui". Ces derniers ne seront pas analysés.

a. Cas des justifications (JO1, JR1)

On retrouve les mêmes types de justifications pour l'exercice 7 que ceux utilisés par la catégorie d'élèves (JO2, JR1).

Chez certains on peut mettre en évidence l'utilisation du théorème en acte, précédemment cité, dans les deux exercices 6 et 7. Par exemple :

Elève A 10 :

- Exercice 6 : "Oui"

Justification : " Les plans (SAB) et (SCD) qui soutiennent d et d', ne sont pas parallèles ni confondus, ils sont donc obligatoirement sécants. De ce fait, les droites d et d' sont sécantes, puisqu'elles font partie de ces plans.

- Exercice 7 : "On ne peut rien dire"

justification : "Les droites d et d' peuvent être sécantes si elles sont situées dans un même plan ou dans des plans sécants. Par contre, elles peuvent faire partie de deux plans parallèles, elles ne sont alors pas sécantes.

b. Cas des justifications (JO1, JR2)

Ces élèves ont explicité pour l'exercice 7, la nécessité que deux droites soient coplanaires pour qu'elles soient sécantes, condition non utilisée ou non vérifiée pour l'exercice 6, du moins de façon explicite.

5.4.3. Conclusion

L'analyse précédente a mis en évidence un théorème en acte, qu'on appellera "droites sécantes" utilisé par certains élèves :

Si deux droites sont incluses respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont sécantes.

Cette règle a été explicitée dans leur justification sans qu'ils aient recours aux tracés. Nous avons montré que dans ce cas il ne s'agit pas d'une règle d'interprétation du dessin. Il reste à étudier dans quelle mesure le dessin renforce ou non ce théorème en acte.

Pour d'autres élèves nous avons mis en évidence la règle d'interprétation "droite-sec-droite"[29] sous condition que les plans contenant ces deux droites ne soient pas parallèles.

6. SYNTHESE DES RESULTATS

Dans le tableau "Tableau 22"[30], nous avons résumé les résultats du test de B. Parzysz et de notre questionnaire.

	Test de B. Parzysz	Questionnaire
I.1) "int-plan"	**OUI** Situation 1 (p.69).	

29 Interprétation "droite-sec-droite" : Si deux segments, représentants deux droites, sont sécants alors les deux droites sont sécantes

30 Dans ce tableau, nous avons utilisé le codage suivant:
(case hachurée) : Cas de figure non étudié dans le questionnaire.
OUI : Règle d'interprétation confirmée
NON : Règle d'interprétation non confirmée

I.2) "ext-plan" Au dessus du plan 1 Intérieur du plan 2 Au dessous du plan	Régions 1 et 2 : certains élèves les considèrent comme partie du plan. "Prolongement mental" du plan dans le sens horizontal. - Au dessus / Au dessous : On ne peut rien conclure.	- Régions 1 et 2 : étudié par B. Parzysz - Au dessus / Au dessous : OUI
II.1) "droite-int-plan" P	**OUI** Situation 2 (p.70)	
II.2a) "droite-//-plan" P	**On ne peut pas conclure.** Aucune question ne portait sur le parallélisme.	**OUI**
II.2b) "droite-//-plan" P	**On ne peut pas conclure.** Aucune question ne portait sur le parallélisme.	**OUI**
II.3) "droite-ext-plan" P		Examiné dans le cas du solide : Les élèves considèrent la droite comme non parallèle au plan.
II.4) "droite-sec-plan" P	**On ne peut rien conclure** Présence sur le dessin d'une autre droite sécante avec le plan représentée avec des pointillés.	**On ne peut pas conclure** sur le dessin donné le segment est presque parallèle à un côté du parallélogramme.

III.1) "droite-//-droite"	**OUI** Situation 4 (p.73)	

III.2) "droite-sec-droite"	**On ne peut pas conclure** Présence sur le dessin de deux autres droites où le point d'intersection a été mis en évidence par un "gros point"	- Si les droites ne sont pas "attachées" à des plans : Non. - Si les droites sont "attachées" à des plans : Théorème en acte "droites sécantes"(cf.5.4.3 p. 115)
IV1.a) "plan-//-plan"	**OUI** Situation 3 (p.71)	
IV1.b) "plan-//-plan"	**NON** Situation 3 (p.71)	
IV.2a) "plan-sec-plan"		
IV.2b) "plan-sec-plan"	**OUI** Situation 3 (p.71)	

Tableau 22

Nous avons montré que la contrainte "justifier", nous a permis de mettre en évidence des règles d'interprétation. De plus, nous avons pu identifier ces dernières, pour un même exercice, à travers des réponses du type "oui", "non" ou "on ne peut rien dire".
L'analyse a montré que les justifications basées uniquement sur l'évidence de la perception sont minoritaires[31]. Presque toutes les justifications utilisent des propriétés géométriques, sous contrôle perceptif sans doute. Seulement certaines étapes de ces justifications se limitent à une lecture du dessin en utilisant une règle d'interprétation.

6.1. Régionnement de l'espace

Les règles d'interprétation "int-plan" et "ext-plan" étaient confirmées par le test de B. Parzysz. Notons également, que la règle d'interprétation "int-plan" a été mobilisée par les élèves dans le cas de l'exercice 1.
Dans le cas de l'exercice 5, les élèves ont utilisé des justifications faisant apparaître deux régions "au-dessus" et "au-dessous" du plan. Ceci valide la conjecture "au-dessus/au-dessous".

6.2. Position relative d'une droite par rapport à un plan

La règle d'interprétation "droite-int-plan" a été confirmée par le test de B. Parzysz.
La règle d'interprétation "droite-//-plan" a été confirmée par notre questionnaire. Cette règle a permis de justifier qu'une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est parallèle à un segment de celui-ci, et aussi de justifier qu'elle n'est pas parallèle à un plan lorsque sur le dessin elle n'est parallèle à aucun segment de ce plan.
La règle d'interprétation "droite-ext-plan", a été examinée uniquement dans le cas du solide. Deux positions ont été privilégiées : être parallèle au plan (ABCD) ou dans un des deux plans (ABCD) et (CDGH). Nous pensons, que c'est la valeur de la variable "solide", cube, qui a induit ces lectures.
Enfin, pour la règle d'interprétation "droite-ext-plan", nous n'avons pas pu conclure. Rappelons que B. Parzysz n'a pas non plus conclu à ce propos. Seulement ce n'est pas pour les mêmes raisons (développées dans le paragraphe 1.1.2, p. 70). En effet, dans notre cas, nous l'expliquons en partie par le fait que la représentation de la droite d était presque parallèle à un coté du parallélogramme.

6.3. Position relative de deux droites entre elles

Le test proposé par B. Parzysz a confirmé la règle d'interprétation "droite-//-droite". L'analyse des justifications de l'exercice 7, n'a pas révélé l'utilisation de la règle

31 50 justifications sur 991 sont du type "ça se voit" . Ceci n'est-il pas un élément du contrat où les justifications "autorisées" doivent être de nature géométrique ?

d'interprétation "droite-sec-droite". En revanche, dans les exercices où notre étude porte sur des solides, nous avons constaté que cette règle a souvent été utilisée par les élèves pour déduire que deux droites sont sécantes.
Un théorème en acte a été mis en évidence dans l'analyse de l'exercice 7 :

Si deux droites sont incluses respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont sécantes.

Lorsque nous avons étudié les positions relatives de deux droites, nous avons constaté que l'on a moins de réponses "on ne peut rien dire" dans le cas où ces deux droites sont rattachées à des plans, que si elle sont définies comme droites de l'espace sans rattachement à un plan.

7. CONCLUSION

Des conventions de représentation adoptées dans l'enseignement ont pour fonction d'illustrer une situation spatiale, et donc d'élargir le domaine de fonctionnement du dessin. Ces conventions deviennent chez des élèves des "règles d'interprétation" pour la lecture du dessin, ce qui n'était nullement l'intention de l'enseignement. Ceci valide l'hypothèse de recherche "convention" formulée dans le chapitre 1 :

Les conventions de représentation de la perspective cavalière deviennent des règles d'interprétation d'un dessin chez les élèves.

Certaines règles d'interprétation sont apparues uniquement ou plus particulièrement dans l'une des classes, alors que d'autres sont apparues en proportion équivalente dans toutes les classes. Nous expliquons ceci par le fait que certaines conventions ne sont pas utilisées par tous les enseignants, du moins de façon systématique, c'est en particulier le cas du "codage de l'intersection de droites".
Les élèves utilisent de façon conjuguée ces règles avec des théorèmes de la géométrie dans l'espace pour justifier leurs réponses. Il est à noter que ces théorèmes ne contredisent nullement les règles d'interprétation, puisque ces dernières ne sont que des illustrations des premiers. On peut déduire qu'il y a absence de conflits entre les connaissances géométriques et la lecture du dessin. Cela ne peut que renforcer l'usage de règles d'interprétation.
La notion de coplanarité joue un rôle important dans les problèmes d'incidence de deux droites dans l'espace. Or le dessin ne peut être informatif que si l'on utilise d'autres moyens de contrôle basés sur les règles de la perspective cavalière, comme c'est le cas

pour l'exercice 6. En effet, c'est le seul[32] exercice de la série auquel on peut répondre par le dessin, par l'utilisation de la règle "si l'intersection de d avec Δ, intersection des plans (SAB) et (SCD), est confondue avec l'intersection de d' et Δ, alors les droites d et d' sont sécantes". Cette règle n'est pas annoncée dans le cours, mais elle doit être justifiée par l'utilisation des propriétés d'incidence. L'application de cette règle nécessite la construction sur le dessin des intersections des plans (SAB) et (SCD), ce qui n'est pas toujours possible. Cette remarque montre que dans certains cas le dessin peut fournir une réponse contrôlable par les propriétés géométriques et les règles de la perspective cavalière. Il se trouve que l'étude des manuels nous conduira à étudier de façon approfondie ces cas dans le chapitre C2.

32 En plus de l'exercice 1, mais dans lequel la réponse ne dépend pas du dessin.

PARTIE C

CHAPITRE C1

EVOLUTION DES PROBLEMES DE CONSTRUCTION AU COURS DE CE SIECLE.

Nous nous proposons d'analyser la vie des problèmes de construction en géométrie plane et dans l'espace, et les fonctions du dessin dans leur résolution. Plus précisément, de montrer que le dessin a rempli des fonctions différentes dans la résolution des problèmes de construction au cours des deux périodes 1920 - 69 et 1982 à nos jours. Pour cela, nous avons choisi comme méthodologie, l'analyse des exercices résolus dans les manuels et des commentaires des auteurs sur les problèmes de construction. Cette analyse est réalisée respectivement dans chacune de ces périodes mais à des moments où le rapport institutionnel aux objets "problèmes de construction" et "dessin" est stable.
Tout d'abord, nous caractérisons les problèmes de construction par rapport à leur résolution et plus précisément par rapport au couple, algorithme de construction et procédé de tracé.
Ensuite, pour chacune des périodes 1 et 3, nous analyserons les manuels, par rapport aux deux composantes de résolution, algorithme de construction et procédé de tracé.

Deux composantes des problèmes de construction à la règle et au compas peuvent être distinguées : l'algorithme de construction qui prend en charge les moyens de la réalisation de la construction et la preuve de constructibilité qui justifie la faisabilité de la construction suivant les moyens permis par une théorie donnée. Chevallard[1] a souligné la différence entre ces deux composantes par rapport à la "simplicité" ou non de la solution ainsi que leur complémentarité. Il a aussi montré que "les problèmes de construction sont, pour les mathématiciens, des problèmes de constructibilité" (Chevallard 1991, p.66). Il souligne cette idée en étudiant un point singulier de l'histoire des mathématiques, la géométrographie[2] : "On voit donc que la géométrographie s'intéresse aux *procédés* de construction eux-mêmes, en se proposant de les comparer afin de trouver les plus simples, selon des critères déterminés. La singularité même de cette façon d'envisager l'étude des procédés de construction - et, déjà, d'envisager que l'on puisse les étudier pour eux-mêmes - et le peu de succès qu'elle a rencontré montre,

1 Chevallard 1991
2 A cet effet on peut consulter LEMOINE "Géométrographie, ou art des constructions géométriques" 1902.

a contrario, l'omniprésence des problèmes de constructibilité en mathématiques et met en évidence de nouveau, et de manière plus précise encore, la distinction entre démonstration de constructibilité et algorithme de construction." (Chevallard 1991, p.67).

Dans les problèmes de construction, toutes les données sont ramenées aux points, puisqu'une droite sera remplacée par deux points et un cercle par deux points également, l'un représentant le centre et l'autre un point du cercle. De même, l'objet à construire est remplacé par des points. Ainsi le principe de base d'un problème de construction peut se résumer en la recherche d'un point à partir des points donnés, comme le précise Lebesgue dans une définition qu'il donne aux problèmes de construction :

> Des points sont donnés, on se propose de construire un point qu'ils déterminent en n'usant que de la règle et du compas, la règle ne devant servir qu'à joindre deux points donnés ou précédemment obtenus, le compas ne devant servir qu'à tracer une circonférence dont le centre est un point donné ou déjà obtenu et dont le rayon est la distance de deux points donnés ou déjà obtenus.
>
> (H. Lebesgue, 1950, p.23)

Plus précisément, dans un ouvrage de synthèse sur la construction à la règle et au compas, Carrega reprend cette définition[3]. La définition de la constructibilité d'un nombre a permis d'étudier et de résoudre certains problèmes de construction par des méthodes algébriques.
Ceci nous montre en quoi diffèrent les deux composantes : la preuve de constructibilité permet de justifier qu'un objet est constructible à la règle et au compas par des considérations géométriques mais aussi algébriques, l'algorithme de construction permet d'élaborer une construction qui est géométrique.

---

[3] 1 - Soit ß partie finie du plan P contenant au moins deux points, appelés points de base.
* **Un point** M est dit **constructible à la règle et le compas** s'il existe une suite de points M1, M2,......., Mn=M, du plan P tels que:
chaque point M_i est obtenu comme intersection de deux droites ou d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles.
Ces droites et ces cercles sont obtenus à partir de l'ensemble E_i=ß U {M_1,.......,M_{i-1}} de la façon suivante:
- droite passant par deux points de E_i
- cercle de centre un point de E_i et de rayon la distance entre deux points de E_i.
* **Une droite** est dite **constructible** si elle passe par deux points constructibles.
* **Un cercle** est dit **constructible** s'il est centré en un point constructible et a pour rayon la distance entre deux points constructibles.
2 - **Un nombre réel** est **constructible** s'il est l'une des coordonnées d'un point du plan, muni d'un repère orthonormé, constructible.

Un autre aspect des problèmes de construction est d'envisager le procédé de tracé sur une feuille de papier. Cet aspect n'intéressait pas les mathématiciens, puisqu'ils travaillaient sur des objets idéaux utilisant des instruments idéaux, comme l'a souligné Chevallard (1991, p. 74) :

> "On voit donc que la notion de constructibilité, dominante en mathématique, est mathématiquement bien définie ; et qu'elle l'est indépendamment de toute référence à des algorithmes de construction particuliers. Mais ces considérations ne permettent pas encore de prendre en compte le passage effectif au dessin sur papier, c'est-à-dire à ce que nous appellerons les *procédés de tracé*.
> La confusion essentielle à cet égard semble bien se situer dans le fait que «constructibilité à la règle et au compas » - expression qui désigne une certaine classe de problèmes - a pris subrepticement le sens de « tracé avec les instruments que sont la règle et le compas ». Or, comme nous l'avons vu chez Euclide, les figures sont des idéalités, des entités immatérielles, et la « règle » et le « compas » sont, de même, des instruments idéels... De plus, les dessins n'y sont que des *représentations* - nécessairement imparfaites - de ces idéalités et ne sont là que pour aider le raisonnement."

Ceci ne signifie pas que le dessin est absent de leur pratique. Le dessin est utilisé par les mathématiciens comme support au raisonnement sans qu'ils se préoccupent des moyens techniques pour sa réalisation : on peut le tracer à main levée, par exemple. Ainsi, le passage au dessin ne constitue-t-il pas un problème d'étude pour le mathématicien. Chevallard (1991, p.74) poursuit en soulignant un changement de problématique dans le passage du problème de construction au problème de tracé.

> "On comprend alors que traduire les problèmes euclidiens de constructions à la règle et au compas en termes de « tracés n'utilisant comme seuls instruments de dessins que la règle et le compas » constitue un changement de problématique et le passage du point de vue du mathématicien à un *faux* point de vue de dessinateur - faux, puisque c'est là introduire des contraintes étrangères à son art. "

Les objets géométriques que l'on considère dans les problèmes de construction en géométrie plane sont : point, droite et cercle. Le passage au tracé peut se faire sur une feuille de papier à l'aide des instruments règle et compas. Si de tels problèmes existent dans la géométrie dans l'espace, le passage au tracé va dépendre du mode de représentation choisi. De plus, ce passage se manifeste par une perte d'informations, compte tenu de la non bijectivité entre l'espace géométrique et la feuille de papier, à moins de considérer plusieurs projections, comme dans le cas de la géométrie descriptive. Cette dernière permet de considérer les problèmes de construction selon une

problématique analogue à celle de la "construction à la règle et au compas en géométrie plane".
L'examen des ouvrages d'enseignement, depuis le début de ce siècle, nous a permis de repérer des problèmes, que nous avons qualifiés de problèmes de construction dans l'espace, par rapport au critère suivant : *la tâche demandée est de construire un objet vérifiant une ou des conditions géométriques*.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'analyser les problèmes de construction dans le plan et dans l'espace, au cours de ce siècle, en dégageant les fonctions du dessin dans ces problèmes. De plus, nous analyserons les problèmes de construction par rapport aux trois composantes dégagées ci-dessus.
- Preuve de constructibilité :
Elle justifie la faisabilité de la construction suivant les moyens permis par une théorie donnée. Cette justification peut être géométrique ou relever d'un autre cadre, algébrique par exemple.
- Algorithme de construction :
Il donne les moyens de réaliser les constructions selon des règles bien définies. Notons qu'un algorithme de construction peut utiliser des constructions déjà établies précédemment. Lorsqu'un algorithme de construction est justifié, il fournit par la même occasion une preuve de constructibilité.
- Procédé de tracé :
Il donne les moyens de la réalisation de la construction sur une feuille de papier.

1. PREMIERE PERIODE.

Nous cherchons à analyser la vie des problèmes de construction en géométrie plane et dans l'espace dans les moments où le rapport institutionnel est relativement "stable". Or, pendant cette période, les programmes de 1945 n'ont pas changé le contenu des programmes de 1923. Nous pouvons considérer[4] qu'il y avait une stabilité du rapport institutionnel à l'objet "problèmes de construction" de 1920 à 1960[5]. Pour notre analyse, nous utiliserons des manuels édités entre 1920 et 1960.

1.1. Cas de la géométrie plane

Nous nous proposons de déterminer les fonctions du dessin dans la résolution des problèmes de construction en géométrie plane. Pour cela, nous procédons à l'analyse de

4 A moins de trouver un changement du rapport institutionnel lors de l'analyse des manuels.
5 Ceci correspond aux états du système d'enseignement E_1 et E_2. (Cf. fig. 11, p.61)

deux manuels, et plus précisément, à l'analyse des exercices résolus et des paragraphes, chapitres ou ouvrages, sur les méthodes de résolution de problèmes.

Du début du siècle jusqu'aux années 60, les problèmes de construction en géométrie plane, constituent une part importante de l'enseignement. Ces problèmes sont traités en classe de Seconde.

Les manuels de l'époque consacrent un paragraphe, voire un chapitre entier, aux problèmes de construction : la définition d'une construction (construction à la règle et au compas) et la fonction de chaque instrument (règle, compas, équerre...)[6] y sont largement détaillées.

Pour notre analyse, nous avons choisis deux manuels. Le premier, est un ouvrage de la classe de Seconde de 1948, que nous pensons assez représentatif des manuels de cette période. Il s'agit du manuel : "Géométrie, Classes de Seconde C et Moderne, par J. Desbats, les éditions Magnard, 1948", qu'on désignera par M1.

Le second est un ouvrage de 1945 consacré aux méthodes de résolution de problèmes de géométrie plane. Il s'agit de : " Méthode de recherche rationnelle des problèmes de géométrie plane, par J. Chauvel, éd. L'école et la famille, 1945", qu'on désignera par M2.

Le manuel M1 est un représentant des manuels qu'on peut utiliser dans les classes de mathématiques, portant sur les contenus du programme selon une organisation cours / exercices. Le manuel M2 a pour objet d'apporter une aide méthodologique pour l'élève. Ces deux manuels sont donc complémentaires pour notre analyse.

Nous examinons d'abord les fonctions du dessin dans les problèmes de géométrie. Ensuite, nous proposons d'analyser la (les) méthode(s) de résolution proposée(s) par ces manuels pour les problèmes de construction en géométrie plane.

1.1.1. Les fonctions du dessin dans les problèmes de géométrie plane

Dans le manuel M1[7], l'auteur a consacré un chapitre à la démarche de résolution d'un problème en géométrie. Comme "directives générales"[8], l'auteur présente trois éléments pertinents pour traiter un problème de géométrie : "lecture d'un énoncé", "réalisation des figures" et "le retour au cours".

Notons qu'au cours de cette période, les exercices proposés dans les manuels ne sont pas accompagnés d'un dessin. Autrement dit, pendant la résolution, la réalisation du dessin est à la charge de l'élève.

---

6 Cf. par exemple "Leçons de géométrie élémentaire. J. Hadamard 1920 p 74-75"

7 M1, pp.53 - 80. Cf. annexe C1.a

8 selon les termes de l'auteur.

48. Réalisation des figures.

A. — En même temps qu'on **lit un énoncé**, on doit **dessiner**, *au fur et à mesure de leur apparition*, les divers éléments (*points*, *droites*, *cercles*) introduits par le texte et qui constituent les **données.**

B. — Il faut faire de **grandes figures, très soignées**, aussi **exactes** que possible. C'est une erreur de penser que l'on raisonnera toujours juste sur une figure fausse.

C. — Il est conseillé de représenter avec des **traits différents** ou **des couleurs différentes**, ce qui est **donné** et ce qui est **inconnu**, ce qui est **fixe** et ce qui est **variable.**

Les éléments **égaux** seront **marqués** de la **même manière**, les *segments* par de **petites « coches »**, les *angles* par des **petits traits courbes**, en nombre **égal.**

Les **parallèles** pourront être indiquées en les munissant de **flèches.**

En un mot, il faut s'efforcer de **traduire sur le dessin toutes les conditions** fournies par l'énoncé, de façon que regardant la figure, **toutes** ces conditions **deviennent visibles.**

D. — Ne jamais oublier que si les données sont dites **« quelconques »**, c'est une grave faute que de les dessiner *particulières.*

En fait, une figure est *toujours particulière;* mais voici ce que nous entendons :

Il faut **éviter d'introduire, dans les figures, des dispositions remarquables qui ne sont pas indiquées par l'énoncé.** On risquerait alors de laisser croire **qu'il existe d'autres hypothèses** que celles réellement contenues dans la question à traiter.

EXEMPLES. — Si on donne deux droites **quelconques, il** faut dessiner deux droites **qui se coupent** (I), ou se couperaient si on les prolongeait (II). Ce serait une faute de les dessiner parallèles (III) (fig. 65).

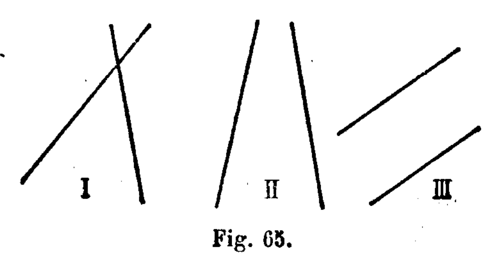


Fig. 65.

Dans la phase de résolution, la partie A correspond à la fonction d'illustration de l'énoncé. L'auteur se place dans le cas où le dessin n'est pas donné dans l'énoncé et il est donc à la charge de l'élève.

La partie C invite l'élève à rendre les hypothèses visibles sur le dessin, par des marques, des couleurs.

La partie D conseille d'éviter les cas particuliers.

Ensuite, la phase heuristique est présentée dans la partie "le retour au cours". L'auteur de ce manuel énumère des conseils pour et comment utiliser le "bon" théorème ou la "bonne" propriété, mais n'accorde aucune place de façon explicite à la figure.

Nous retrouvons les mêmes conseils dans les manuels de la période 3, examinés dans le chapitre A (cf. 5.1.2, p.32), pour la réalisation des figures par les élèves pour la résolution de problèmes.

1.1.2. Méthodes de résolution des problèmes de construction en géométrie plane

La résolution des problèmes de construction, présentée dans les manuels, s'inscrit dans une démarche dite "analyse - synthèse".
Cette démarche "analyse-synthèse" a occupé une place importante chez les mathématiciens et ce au moins depuis Euclide. Seulement, comme le souligne Gardies (1991), Euclide n'a pas défini cette démarche dans les éléments. A propos des propositions du livre XIII d'Euclide, Gardies (1991, p.100) précise :

> "Nous avons vu qu'Euclide exposait une procédure qui se donnait comme strictement synthétique, à partir de laquelle on pouvait seulement deviner la manière analytique dont il avait pu découvrir le cheminement de sa construction".

Puis, l'auteur précise que pour les propositions 13, 14, 15, 16 et 17 du livre XIII d'Euclide (à propos des cinq solides platoniciens), Pappus a résolu les mêmes problèmes, mais en distinguant explicitement l'analyse, puis la synthèse
Heath (1956, p.138) précise la citation de Pappus :

> "The so-called αναλυομενος ('Treasury of Analysis') is, to put it shortly, a special body of doctrine provided for the use of those who, after finishing the ordinary Elements, are desirous of acquiring the power of solving problems wich may be set them involving (the construction of) lines, and it is useful for this alone. It is the work of three men, Euclid the authors of the Elements, Apollonius of Perga, and Aristaeus the elder, and proceeds by way of analysis and synthesis.
> **Analysis** then takes that wich is sought as if it were admitted and passes from it through its successive consequences to something which is admitted as the result of synthesis : for in analysis we assume that wich is sought as if it were (already) done (γεγουος), and we inquire what it is from which this results, and again what is the antecedent cause of the latter, and so on, until by so retracing our steps we come upon something already knowon or belonging to the class of first principales, and such a method we call analysis as being solution backwards (αυαπαλιυ λυσιυ).
> But in the **synthesis**, reversing the process, we take as already done that which was last arrived at in the analysis and, by arranging in their natural order as consequences what were befor antecedents, and succevely connecting them one with another, we arrive finally at the construction of what was sought ; and this we call synthesis."

Le raisonnement par "analyse-synthèse" a été utilisé non seulement en géométrie mais aussi dans le calcul littéral en algèbre.

Dans notre travail, nous nous intéressons à l’usage de la démarche "analyse-synthèse" dans l’enseignement français au cours de ce siècle en géométrie et plus particulièrement pour la résolution des problèmes de construction. Nous proposons d'examiner le manuel M1 par rapport à la démarche "analyse-synthèse" dans la résolution des problèmes de construction en géométrie plane.

a) Examen du manuel M1

J. Desbats[9] présente la méthode "par analyse" comme étant celle employée dans les problèmes de construction et comme étant la seule méthode de recherche :

> “on est obligé de partir à la découverte des propriétés que contient la figure, en triant avec soin celles qui sont susceptibles de s'appliquer au problème que l'on cherche à résoudre.
> Un « décortiquage » sérieux de la question, une analyse précise, sont nécessaires.
> Lorsqu'on expose ensuite le résultat de ses recherches en passant par tous les intermédiaires qui ont permis d'obtenir la solution, on dit que l'on fait un **exposé analytique.**
> La *méthode analytique* est en fait la seule méthode de recherche. C'est celle qu'on emploie dans les problèmes de construction.”

Ensuite, l'auteur (p.62) présente la méthode "synthétique" comme l'inverse de la précédente :

> “Ayant obtenu la solution d'une question, par un procédé quelconque, on l'expose généralement sans laisser la trace des divers échelons, des différents tâtonnements inhérents à la méthode analytique.
> On suit en quelque sorte la marche inverse de l'analyse.”

Enfin, l'auteur évoque la nécessité d'une discussion sur l'existence et le nombre de solutions au problème.

Les exemples présentés ensuite, relatifs aux problèmes de constructions, montrent qu'il faut construire une figure qui sera l'objet d'étude. L'auteur le dit explicitement[10] :

---

9 M1, p.57
10 M1, p.70.

"On dessine une figure que *l'on suppose répondre à la question* et sur laquelle on marque avec soin toutes les données en s'aidant de traits particuliers, ou mieux de crayons couleurs.
Il s'agit uniquement d'une figure d'étude sur laquelle on va s'efforcer de voir comment les éléments inconnus se rattachent aux éléments connus, ou se déduisent de ceux-ci."

A ce propos, examinons un exemple donné dans ce manuel (p. 58) :

52. Premier exemple.

CONSTRUIRE UN TRIANGLE RECTANGLE CONNAISSANT UN ANGLE AIGU ET LA SOMME DES DEUX CÔTÉS DE L'ANGLE DROIT.

Soit (fig. 69) un triangle rectangle **ABC** dans lequel, par hypothèse, on connaît l'angle aigu $\widehat{\mathbf{C}}$ et la somme des longueurs des côtés **AB** et **AC.**

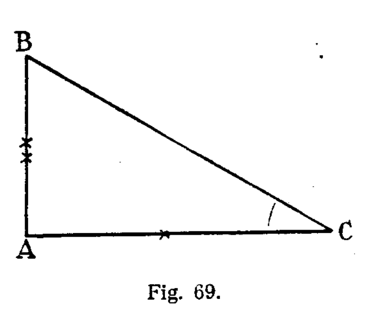


Fig. 69.

Remarquons que, pour l'instant, *on ne connaît pas le triangle.* Mais on le *dessine* comme **figure d'étude** de façon précisément à **analyser** les propriétés de la figure *dans laquelle on suppose,* a priori, *réalisées les conditions de l'énoncé.*

L'idée la plus naturelle est évidemment de mettre en évidence la somme donnée des côtés de l'angle droit (fig. 70).

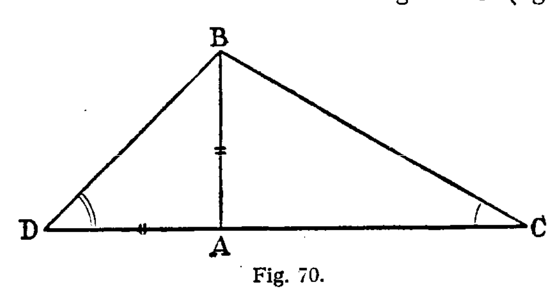


Fig. 70.

Pour cela, il **suffit** de prolonger **AC** au-delà de **A**, d'une longueur **AD = AB.**

On ne peut pas, à cet instant, surtout si l'on a pris soin d'indiquer par des *coches identiques* l'**égalité** de **AD** et **AB**, ne pas être frappé par le fait que le triangle **ADB** est **un** triangle à la fois **rectangle** et **isocèle.**

Allant jusqu'au fond de cette constatation, on doit **conclure que** les angles à la base étant égaux, chacun d'eux vaut :

$$\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

On se trouve alors en présence du triangle **BCD** dans lequel on connaît :

le côté : **DC = AB + AC**	*(donnée de l'énoncé)*;
l'angle : $\widehat{\mathbf{C}}$	*(donnée de l'énoncé)*;
l'angle : $\widehat{\mathbf{D}} = \mathbf{45^\circ}$	*(résultat de notre analyse).*

L'auteur propose de réaliser la figure puis, en la considérant comme objet d'étude, d'analyser ses propriétés. Il montre ensuite comment on peut dégager une méthode. Ceci nécessite des constructions supplémentaires, d'exploiter des idées, de mettre en évidence des relations ... etc.
Nous proposons d'analyser chacune des deux composantes "analyse" et "synthèse" dans le cadre des problèmes de construction géométrique en géométrie plane, dans les deux manuels M1 et M2.

b) Analyse

Elle consiste à supposer le problème résolu. Pour cela tous les moyens sont bons pour réaliser un dessin rendant compte des conditions du problème.
Une fois que le dessin est réalisé, on essaie de dégager des propriétés (qu'on utilisera dans la partie synthèse) permettant de réaliser la construction demandée. Souvent on utilise des propriétés de certaines configurations usuelles.
Pour cette partie "analyse" les auteurs des deux manuels M1 et M2 proposent une méthode dite "méthode d'intersection de lieux géométriques".
Cette méthode repose sur le fait que les problèmes de construction se ramènent souvent à la détermination d'un point. Ce point est considéré comme intersection de deux objets géométriques (M1, pp. 72 - 73).
L'auteur de ce manuel justifie cette démarche par le fait qu'elle permet de poser le problème d'existence et de mener une discussion.

D'une manière assez générale; **un point à construire devra satisfaire à deux conditions.**

Laissons la *première de côté*, alors ce n'est plus *un seul point* qui satisfait à la *seconde* condition, **mais une infinité de points.** Ils se répartissent sur une courbe **(C_2), lieu géométrique des points satisfaisant** à cette seconde condition.
Laissons, au contraire, *la seconde condition de côté,* alors ce n'est plus *un seul point* qui satisfait à la *première*, mais **une infinité.** Ces points se répartissent sur la courbe **(C_1), lieu des points satisfaisant à cette première condition.**

Finalement, **le point que l'on cherche doit appartenir à la courbe (C_1) et à la courbe (C_2).** Il est donc **en l'un de leurs points communs.**

Il y a autant de **solutions**(*) que les courbes **(C_1)** et **(C_2)** ont de **points communs.**

On voit que le nom de ***méthode par intersection de lieux géométriques*** est complètement justifié.

Cette méthode est à coup sûr l'une *des plus générales* et *des plus fécondes* de la géométrie élémentaire. Elle semble avoir été introduite dans la science par l'**École de Platon (430-347 avant J.-C.).**

Ce procédé de construction offre l'immense avantage, dans la plupart des cas, de permettre de **discuter**, c'est-à-dire de voir pour **quelles grandeurs des données** le problème est **possible**, et dans chaque cas **de préciser le nombre** de figures répondant à la question (**solutions**).

Dans le manuel M2 (p. 130), on retrouve une description analogue de cette méthode. De plus, l'auteur explique comment utiliser cette méthode dans les problèmes de construction géométrique :

79. - Voici comment on applique cette méthode :

1° Si les constructions à faire n'apparaissent pas d'une façon évidente, supposer le problème résolu, c'est-à-dire, considérer une figure de même nature que celle qu'on veut construire, et chercher, **d'après les données du problème,** *des propriétés de la figure qui permettent d'effectuer la construction demandée, ou une autre construction d'où l'on puisse facilement déduire la construction demandée.*

Pour cette recherche, il importe de choisir judicieusement l'élément que l'on placera le premier : **l'élément de base,** *sur lequel "s'appuiera", en quelque sorte, la construction. C'est par rapport à cet* **élément de base** *que l'on recherchera les lieux géométriques qui déterminent les points à construire.*

Sur l'élément de base, effectuer, si cela est nécessaire, les constructions auxiliaires destinées à **rapprocher les éléments connus,** *pour obtenir une figure intermédiaire qu'on puisse construire avec ces éléments (voir ci-dessous, n° 79 b, dans lequel AC' a été pris comme élément de base).*

2° Construire, en utilisant les résultats trouvés, les deux lieux géométriques nécessaires pour la détermination de chaque point. Montrer que la figure obtenue satisfait aux données.

3° Discuter le problème, c'est-à-dire, exprimer les conditions de possibilité (F et F' doivent avoir au moins un point commun), envisager les différents cas qui peuvent se présenter ; indiquer le nombre de solutions.

La première étape correspond à la partie "analyse". Ainsi, on suppose le problème résolu, on réalise le dessin, on dégage des propriétés de la figure pertinentes pour la construction demandée ou pour une construction intermédiaire[11]. Pour cela, l'auteur explique comment appliquer la démarche d'intersection de lieux géométriques. Les étapes 2 et 3 correspondent à la partie "synthèse".

c) Synthèse

Dans cette partie les auteurs indiquent effectivement le programme de construction en justifiant les différentes étapes. Parfois, une discussion s'impose.

Par exemple dans l'extrait du manuel M2, ci-dessus, nous identifions la partie "synthèse" aux étapes 2 et 3.

L'étude des exemples dans ces manuels nous a permis de distinguer trois composantes dans la partie "synthèse".

- Algorithme de construction :

11 Dans les exemples traités dans ce chapitre, l'auteur appelle cette étape : recherche des propriétés de la figure.

Un algorithme de construction permet de donner les différentes étapes de construction selon les règles de construction à la règle et au compas (rappelées dans la note 1, p.124). Or, dans les manuels consultés, les corrigés d'exercices n'explicitent pas toutes les étapes. Par exemple, une solution peut proposer comme étape de construction

- une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point,
- une droite parallèle à une droite donnée passant par un point,

sans donner les moyens pour les réaliser. Autrement dit, l'institution suppose que l'élève sait réaliser ces constructions et donc n'exigera pas qu'il réalise les différentes étapes de construction. C'est dans ce sens que nous dirons que cette construction est une *primitive* :

Une construction est une primitive lorsqu'il n'est pas "nécessaire" d'expliciter les différentes étapes de sa réalisation. Elle se fait donc en une seule étape. Mais on suppose qu'on a les moyens de justifier et de réaliser les différentes étapes de la construction.

Les primitives de construction géométriques peuvent changer d'une institution à une autre.
Dans la suite, nous appellerons ces primitives de construction : **Pcplan (point, droite, cercle)**.

- Preuve de constructibilité ou justification :
Elle permet de justifier l'existence et de discuter les différents cas en utilisant les propriétés du cours.

- Tracé :
Toutes les solutions des exercices proposées dans ces manuels sont accompagnées d'un dessin dans la partie analyse. Celui-ci illustre les différentes étapes de l'algorithme de construction. Mais les moyens qu'il faut mettre en oeuvre pour sa réalisation ne sont pas explicités. Il existe donc des primitives de tracés, dans le sens considéré ci-dessous :

Un tracé est une primitive lorsqu'il n'est pas "nécessaire" d'expliciter les différentes étapes de sa réalisation. il se fait donc en une seule étape. Mais on suppose qu'on a les moyens de justifier et de réaliser les différentes étapes du tracé.

Le problème du tracé n'est pas abordé dans tous les manuels examinés de façon explicite, à l'exception de quelques ouvrages comme celui de Hadamard[12]. En effet, Hadamard (1920, p.74) aborde le problème du tracé, en précisant les imperfections des instruments :

> On réserve le nom de *constructions géométriques* aux constructions effectuées avec la règle et le compas.
> Ces constructions sont, théoriquement, d'une exactitude absolue. Dans la pratique, elles sont effectivement très exactes, mais offrent cependant, comme toutes les autres, des causes d'erreurs (telles que l'épaisseur du trait de crayon).

Chaque instrument : règle, compas (permettant le report de longueur et le tracé de cercles), équerre et rapporteur, est présenté par rapport à sa fonction et son utilisation dans la pratique. Les constructions présentées dans la suite du cours sont des constructions géométriques élémentaires, qui donnent l'algorithme du construction, et elles sont illustrées par un dessin sur lequel sont représentées des "traces" de constructions :

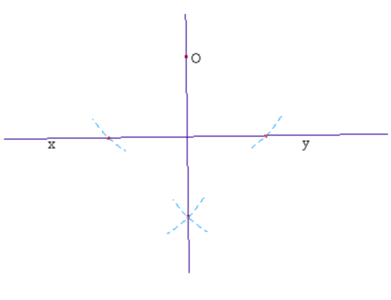


fig. 36

Autrement dit, en dehors du problème lié à l'imprécision du tracé, à chaque algorithme de construction proposé est associé un procédé de tracé, qui doit répondre aux mêmes règles que l'algorithme de construction[13].

Enfin, notons que les manuels définissent ce qu'est résoudre un problème de construction en géométrie plane, comme par exemple dans le manuel[14] :

> Résoudre un problème de construction, c'est donner la possibilité de réaliser un ensemble géométrique au moyen d'opérations simples qui sont:
> tracer une droite;
> tracer un cercle.

---

12 "Leçon de géométrie élémentaire", Géométrie plane. 1920.

13 cf. Note 124, p. 3

14 Dans la partie intitulée "Généralité" du "Cours de Mathématique, 2° A'CMM'" Par G. Girard, A. Lentin, Ed. Hachette, 1961. p152.

Nous verrons dans les exemples qui vont suivre, que l'on peut, en général, réduire un problème de construction à la construction d'un ou plusieurs points.
Chaque point étant défini comme l'intersection de deux droites, ou d'un cercle et d'une droite ou de deux cercles, toute opération pourra être exécutée avec la règle et le compas.
Enfin, le problème de construction demande de réaliser un certain ensemble à partir de certaines données. Une partie du problème consiste à se demander s'il y a une solution quelles que soient les données. C'est ce qu'on appelle la **discussion** du problème.

Comme on peut le voir cette définition est proche de celle qu'on peut trouver dans la sphère savante. Cette définition met en avant une partie importante du problème qui consiste à étudier l'existence d'une solution ce qui amène à la discussion du problème.
Dans les manuels de l'époque, le travail sur le dessin est absent de la démarche de résolution des problèmes.

1.2. Cas de la géométrie dans l'espace

1.2.1. Analyse des manuels

Dans plusieurs manuels les auteurs commentent dans la préface l'esprit du programme et leurs positions par rapport aux notions traitées. Certains auteurs évoquent le problème de la représentation des figures de l'espace.

Une des difficultés essentielles pour les débutants est la représentation des figures de l'espace. Les conventions généralement adoptées se révèlent souvent insuffisantes et il reste un gros effort d'imagination pour réaliser une vision nette de ces figures. Certains de nos collègues ont mis dans le commerce un matériel fort simple de modèles en carton avec adjonction de tiges de métal; cela est très recommandable et chacun peut réaliser ainsi la plupart des figures de ce cours. On nous permettra de souhaiter que, dans un enseignement moderne, une place soit faite à la vision stéréoscopique sous la forme bien connue des anaglyphes ou à toute autre présentation.
L'introduction de notions de géométrie cotée peut parer dans une certaine mesure à l'insuffisance de nos moyens de représentation.

"Géométrie dans l'espace, Classe de première C et Moderne. Par C. Gagnac et al., Masson et Cie, 1952".

Ces auteurs soulignent :
- que pour les débutants, la représentation des figures est l'une des difficultés de la géométrie dans l'espace par l'insuffisance des moyens de la représentation,
- les enseignants peuvent utiliser des modèles matériels d'objets géométriques pour leur enseignement,

- que cette insuffisance des représentations des objets géométriques peut être prise en charge par la géométrie cotée.
Dans les chapitres qui traitent les objets "droites et plans" de l'espace, les propriétés d'incidence relatives à ces objets sont étudiées. Puis, les problèmes de construction sont présentés comme terrain d'application de ces propriétés.

Comme nous l'avons dit, les exercices résolus et les commentaires des auteurs dans les manuels sont des moyens pour caractériser les attentes de l'institution à propos de l'objet de savoir "problèmes de construction".
Nous proposons donc d'étudier un exercice résolu dans un manuel de cette période.

a) Etude d'un exercice résolu dans un manuel d'exercices corrigés

Nous avons pris l'exemple ci-dessous dans un manuel[15] où sont présentés des exercices corrigés. Notons qu'aucun rappel de cours, commentaire sur les notions traitées ou les méthodes de résolution n'est fait. Considérons l'exercice suivant (in A. Béché, p.10) :

***13. — Mener par un point donné A une droite qui rencontre deux droites données D_1, D_2, de l'espace.**

S. Supposons le problème résolu et soit BC la droite passant par A et rencontrant D_1 en B, D_2 en C (*fig. 12*).

Le problème revient évidemment à déterminer le point C.

Or, un lieu de C est la droite D_2.

D'autre part, le point A et la droite D_1 déterminent un plan P qui, contenant les points A et B, contient la droite AB tout entière, et, par suite, le point C de cette droite. Autrement dit, un second lieu de C est le plan P.

Le point C est donc l'intersection de la droite D_2 et du plan P déterminé par la droite D_1 et le point A. Il suffit ensuite de mener la droite CAB.

Fig. 12.

Il faut : 1° que le plan P et la droite D_2 aient au moins un point commun C, et, par suite, que la droite D_2 ne soit pas parallèle au plan P déterminé par la droite D_1 et le point A.

2° Cette condition remplie, il faut que la droite CA ne soit pas parallèle à la droite D_1, ce qui revient à dire que la droite D_1 ne soit pas parallèle au plan déterminé par la droite D_2 et le point A

Dans ce corrigé nous relevons les éléments suivants :

15 Géométrie. Corrigé des exercices de Géométrie de l'espace. Librairie Armand Colin, par A. Béché, 1923.

1 - Démarche de résolution

Nous distinguons deux phases.

- La première traite les "conditions nécessaires": déterminer les conditions, en termes de relations avec les objets donnés, que doit vérifier l'objet à construire. Ici on suppose que l'objet existe. Dans notre exemple : si (BC) existe, le point C appartient à la droite D_2 et au plan (A, D_1). Le dessin n'est pas présenté comme objet d'étude.
- La deuxième traite les "conditions suffisantes" : donner les moyens, en justifiant, pour construire l'objet à partir des données. Il s'agit de vérifier parmi les conditions nécessaires celles qui sont suffisantes. Elle prend en charge l'existence et éventuellement l'unicité.

Nous reconnaissons là, une démarche d'analyse - synthèse. Mais il est intéressant, de noter que l'auteur n'a pas explicité qu'il s'agit d'une démarche par "analyse - synthèse".

2 - Algorithme de construction

D'où nous déduisons un programme de construction :

- construire l'intersection du plan P, défini par A et la droite D_1, avec la droite D_2,
- tracer la droite (AC),
- construire l'intersection de (AC) avec la droite D_1, c'est le point B.

3 - Preuve de constructibilité

En répondant aux contraintes imposées, la solution donne les conditions de l'existence et montre que la droite (BC) est unique.

4 - Tracé

La solution est accompagnée d'un dessin (Fig. 12). Seulement, il n'est pas dit comment le point C a été construit, intersection du plan P avec la droite D_2. On peut se demander si ce point a été placé de façon arbitraire.

Nous retenons que dans cette résolution :

- les deux composantes "preuve de constructibilité" et " algorithme de construction" sont présentes. En fait, elles apparaissent simultanément grâce à la démarche de résolution "analyse - synthèse ",
- le passage au tracé n'a pas le même sens qu'en géométrie plane, compte tenu des contraintes de la représentation en perspective cavalière.

C'est pourquoi nous avons cherché les manuels où les auteurs font des commentaires sur les problèmes de construction dans l'espace, et/ou sur les fonctions du dessin. C'est l'objet du prochain paragraphe.

b) Commentaires des auteurs de manuels par rapport aux problèmes de construction

Certains ouvrages explicitent des règles relatives aux problèmes de construction :

> 25. **Généralités.** —Dans ce qui suit, on étudiera des problèmes dits de construction de droites ou de plans.
> On regardera comme possible la construction d'une droite si l'on en connaît:
> 1° ou deux points;
> 2° ou un point et la direction;
> 3° ou deux plans se coupant et la contenant.
> On regardera comme possible la construction d'un plan si l'on connaît des éléments déterminant ce plan:
> 1° ou trois points non en ligne droite;
> 2° ou un point et une droite ne contenant pas le point;
> 3° ou deux droites concourantes, ou deux droites parallèles.
> On considère alors la recherche comme terminée, mais elle peut ensuite faire l'objet d'une discussion.
> (Géométrie dans l'espace, Classe de Première C et Moderne, Par J. DOLLON, E. Gilet, Ed. Masson et Cie, 1952).

Ces règles donnent ce que nous avons appelé des primitives de construction.

Comme pour les problèmes de construction dans le plan, la résolution de ces problèmes de construction dans l'espace doit respecter une condition de base : on ne peut construire un objet qu'à partir des objets construits selon des règles. Nous développons ci-dessous les règles, pour la plupart implicites, que nous avons pu dégager dans ces ouvrages :

Une droite est construite si :

- elle passe par deux points ,
- elle est l'intersection de deux plans sécants,
- elle passe par un point et est parallèle à une droite ou à un plan.

Un plan est construit dans l'un des cas suivants :

- il contient trois points non alignés construits,
- il est défini par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite,
- il est défini par deux droites concourantes sécantes,
- il est défini par deux droites parallèles.

Un point est construit s'il est

- intersection de deux droites sécantes construites,
- intersection d'une droite et d'un plan construits.

Enfin, les points, les droites et les plans de l'exercice sont considérés comme des objets construits.

Dans la suite, nous appellerons ces primitives de construction : **Pcespace (point, droite, plan).**

Maintenant que le problème de construction dans l'espace est défini, qu'en est-il pour le problème du tracé ?
A ce sujet Hadamard précise dans une note, à laquelle plusieurs problèmes de construction renvoient :

> "**Nota.** -Dans tous les problèmes de construction (exerc. 424, 426, 426 bis, etc.) nous supposons, sauf indication spéciale du contraire (voir ci-dessous), qu'on sache:
> Faire passer un plan par trois points donnés;
> Prendre l'intersection de deux plans; d'une droite et d'un plan;
> Effectuer dans un plan donné d'une façon quelconque dans l'espace, les constructions connues de la géométrie plane.
> Cette supposition est purement conventionnelle, puisqu'il n'existe aucun moyen de réaliser pratiquement ces opérations; toutefois, la géométrie descriptive apprend à représenter par des figures planes les figures de l'espace; et, dans ce mode de représentation, les constructions que nous venons d'énumérer peuvent être effectuées avec la règle et le compas.
> Nous nommerons constructions *effectives* celles qui devront être réalisées sans le bénéfice de la convention précédente."
> (Leçons de géométrie élémentaire, vol II (Géométrie dans l'espace, Par J. Hadamard, 1921.p.23).

Cette note soulève le problème du tracé. D'une part, compte tenu du mode de représentation adopté dans l'enseignement, on s'autorisera à utiliser des arbitraires dans la construction : ce que nous appelons "les règles d'usage". D'autre part, l'auteur renvoie à la géométrie descriptive qui prend en charge la réalisation de ces constructions sans les arbitraires et donc à la règle et au compas.
Dans un autre manuel, à propos des problèmes de tracé, les auteurs soulignent qu'on ne peut pas traiter les problèmes de construction dans l'espace comme ceux de la géométrie plane.

> Exercices. NOTA. - Dans tous les problèmes de construction dans l'espace il n'est pas question, pour l'instant, de construire les résultats comme en géométrie plane.
> Nous supposerons que:
> - un plan est déterminé comme il est dit au n° 173;
> - l'on sait prendre l'intersection d'une droite et d'un plan ou deux plans;
> - l'on sait faire dans un plan donné les constructions de la géométrie plane.
>
> (Cours de Mathématique, 2° A'CMM', Par G. Girard, A. Lentin, Ed. Hachette, 1961).

En matière de preuve de constructibilité, rien ne justifie, a priori, une différenciation entre le plan et l'espace. En revanche, en ce qui concerne la réalisation du tracé sur une feuille, il est nécessaire de les distinguer. En effet, dans le plan, tout ce qui est constructible est réalisable sur la feuille de papier ; cela devient impossible dans l'espace puisque celui-ci n'est pas isomorphe à la feuille de papier, à moins de considérer des modes de construction comme ceux de la géométrie descriptive.

1.2.2. Les règles d'usage

Pour certaines constructions, la réalisation effective de la construction de certains objets de l'espace n'est pas possible selon les règles de la représentation adoptée (la perspective cavalière). Par exemple, sauf à l'élaborer de façon arbitraire, la représentation de l'intersection de deux plans ou d'une droite et d'un plan ne peut pas être obtenue par des constructions auxiliaires se ramenant à l'intersection de droites[16]. Ceci nous conduit à introduire la notion de "règle d'usage".

Une règle d'usage est une pratique qui a le statut d'une convention : elle donne le droit de représenter un objet géométrique de façon arbitraire.

Concernant les problèmes de construction en géométrie dans l'espace, on peut retenir au moins trois règles d'usages concernant les problèmes d'incidence :

RU(P,P) : "représenter de façon arbitraire l'intersection, lorsqu'elle existe, de deux plans".
RU(P,D) : " représenter de façon arbitraire l'intersection, lorsqu'elle existe, d'un plan et d'une droite".
RU : " représenter de façon arbitraire l'intersection, lorsqu'elle existe, d'une droite et d'un plan; de deux plans"

Nous proposons de dire qu'une solution utilisant une de ces règles est une **construction évoquée**.
Dans le cas contraire, nous dirons qu'une **construction est effective**, lorsqu'on peut la réaliser sur le dessin sans aucune règle d'usage.

Nous distinguerons deux types de problèmes de construction : ceux dont la résolution peut se faire à l'aide d'une construction effective qu'on notera PC_{ef} et ceux dont la résolution ne peut se faire qu'à l'aide d'une construction évoquée qu'on notera PC_{ev}.

16 Nous reviendrons sur ce point au paragraphe d), p.163.

Pour les problèmes PC_{ef}, la résolution peut utiliser une construction évoquée aussi bien qu'une construction effective.
L'analyse d'autres exercices caractérisés comme des problèmes de construction montre qu'ils sont du type PCev.
Pour illustrer nos propos, nous considérons le problème suivant relevé dans les manuels de l'époque. On l'appellera "Problème 1". Celui-ci sera repris dans la suite pour voir s'il peut vivre dans l'institution "enseignement secondaire" au cours de la période 3.

1.2.3. Etude du "Problème 1"

Enoncé du problème

Soit P un plan, d une droite sécante à P et A un point n'appartenant ni à d ni à P. Construire une droite passant par A, sécante à d et parallèle à P. Le problème admet-il une solution ?

Nous proposons deux solutions pour ce problème selon les règles définies ci-dessus. Nous avons rédigé seulement la partie qui correspond à la "synthèse".

Solution (S1P1)
Par A on trace la parallèle d' à la droite d. Comme d est sécante avec P, d' l'est aussi. Soit J le point d'intersectin de P avec d' et K le point d'intersection de P avec d. Soit Δ la parallèle à la droite (JK) passant par A.
Δ et (JK) définissent un plan Q. La droite d', contenant les points A et J du plan Q, est incluse dans le plan Q. La parallèle à d' passant par K est incluse dans le plan Q, donc la droite d aussi. Ainsi, les droites d, d', Δ et (JK) sont incluses dans le plan Q.
Δ est donc parallèle au plan P.
Dans le plan Q, (JK) est sécante avec d et Δ est parallèle à (JK) donc Δ est sécante avec d et elle est parallèle au plan P.

Cette solution montre l'existence de la droite Δ. De plus, elle donne les différentes étapes pour obtenir d à partir des éléments de départ à partir d'un raisonnement déductif. Cependant, les points J et K sont placés de façon arbitraire[17].

17 Mais dans un espace réduit, à savoir à l'intérieur du parallélogramme.

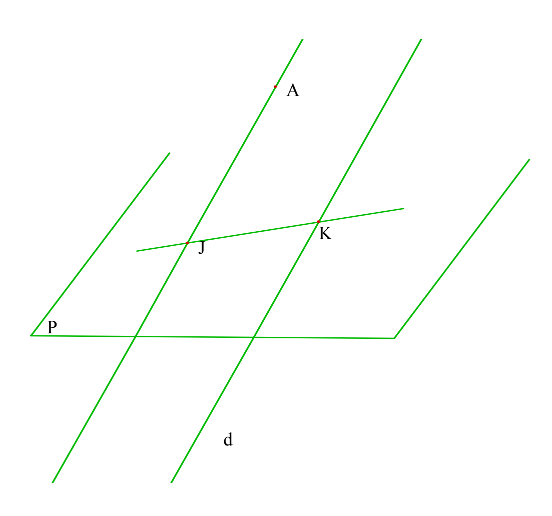


fig. 37

Solution (S2P1)

Considérons le plan Q défini par le point A et la droite d. Les plans P et Q sont sécants selon une droite d', puisque d est sécante à P et que A n'appartient pas à P.
Dans le plan Q, le point A n'appartient pas à d', donc il existe une seule droite Δ passant par A et parallèle à d', donc parallèle à P. Elle est sécante avec d.

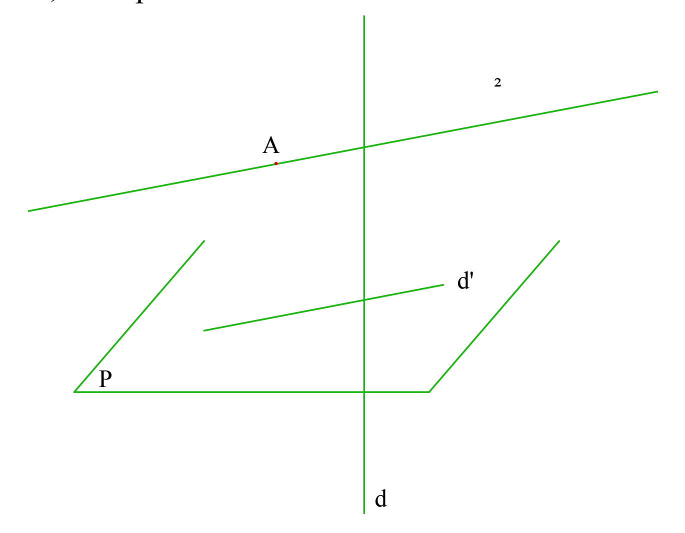


fig. 38

Comme pour la solution S1P1, cette solution montre l'existence de la droite Δ en donnant les différentes étapes qui permettent d'obtenir Δ à partir des éléments de départ et d'un raisonnement déductif. Quant au dessin, il faut noter le tracé de la droite d' de façon arbitraire.

Ainsi la solution S1P1 du problème 1 utilise la règle d'usage RU(P,D) ; et la solution S2P1 utilise la règle RU(P,P).

1.2.4. Géométrie descriptive

Nous avons montré dans les paragraphes précédents que les manuels indiquaient que le dessin était insuffisant pour le tracé dans des problèmes de construction. Et pour tout ce qui concerne la dimension du tracé, les auteurs renvoient à la géométrie descriptive. D'ailleurs, l'enseignement de la géométrie descriptive est justifié par l'insuffisance de l'apport du dessin en géométrie dans l'espace, comme le montre l'extrait suivant :

> "La géométrie descriptive a pour objet de remédier à cette insuffisance du dessin ordinaire; elle utilise pour représenter une figure de l'espace, sa projection sur un plan horizontal, ou bien ses projections sur deux plans, dont l'un est vertical et l'autre est horizontal". (Géométrie, classe de première classique C et première moderne, par A. Benoît, Vuibert, 1946, p.155).

Dans l'extrait ci-dessous, les auteurs montrent d'abord l'insuffisance du dessin, représentation d'un objet de l'espace en perspective, par rapport à des fonctions du dessin en géométrie plane, comme prendre des mesures ou réaliser des constructions.

> "Objet de la géométrie descriptive. - Toute figure plane peut être représentée sur une feuille de papier à dessin par une figure égale ou par une figure semblable construite à une échelle donnée. On peut alors effectuer sur le dessin obtenu, les mesures et les constructions géométriques relatives à la figure donnée.
> Il n'en est pas ainsi pour une figure de l'espace représentée sur un plan par un dessin à vue ou perspective. Les angles et les rapports entre les différents segments ne sont pas en général conservés si bien qu'un tel dessin est insuffisant pour les applications pratiques.
> *D'où la nécessité de méthodes géométriques permettant la représentation sur un plan d'une figure de l'espace et la résolution sur le dessin obtenu des problèmes relatifs à la figure de l'espace*."
> (Géométrie dans l'espace, Classe de Première des Lycées et collèges, par C. Lebossé et C. Hémery, éditeur Fernand Nathan, 1947, p. 181)

Notons la distinction entre dessin et figure chez ces auteurs. Le dessin, c'est le tracé sur une feuille de papier d'une figure qui est du monde géométrique. La géométrie descriptive est présentée comme moyen permettant de résoudre sur le dessin des problèmes portant sur la figure géométrique de l'espace.

Monge a défini, dans son traité, la géométrie descriptive par :

> "Cet art a deux objets :
> Le premier est de représenter avec exactitude, sur des dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et qui sont susceptibles de définitions rigoureuses...

> Le second objet de la géométrie descriptive, est de déduire de la description exacte des corps tout ce qui suit nécessairement de leurs formes et de leurs positions respectives. Dans ce sens, elle est un moyen de rechercher la vérité; elle offre des exemples perpétuels du passage du connu à l'inconnu”[18].

Ainsi la géométrie descriptive permet entre outre d'établir des procédés de construction d'un objet géométrique répondant à des contraintes.
Les premières constructions présentées dans l'ouvrage de Monge, cité ci-dessus, sont relatives aux objets droite et plan comme par exemple :

- Construire une droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné.
- Construire un plan parallèle à un plan donné et passant par un point donné.
- Construire un plan perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné.

Ensuite sont étudiées les constructions de plans tangents à une surface, passant par un point de la surface ou non. Enfin, Monge examine la construction d'intersection des surfaces courbes. Ces procédés de construction sont justifiés par les règles de la perspective. Le dessin permet la réalisation d'un tracé d'une construction et d’un support pour la résolution de problème de la géométrie dans l'espace.

Du fait du mode de représentation offert par la géométrie descriptive, les domaines de fonctionnement et d'interprétation du dessin deviennent relativement importants comme en géométrie plane. Cependant, la géométrie descriptive confronte ses utilisateurs à au moins deux difficultés. L'une, due à ses règles, est qu'elle est plus complexe que le mode de représentation en perspective parallèle. Et l'autre est qu'elle ne facilite pas la visualisation des objets de l'espace. En effet, les objets ne deviennent visibles qu'à partir du moment où on sait comment les décoder. Et ce décodage est une tâche difficile pour les élèves.

1.3. Conclusion

De 1923 à 1969, la première période examinée, les problèmes de construction en géométrie plane et en géométrie dans l'espace, sont présents dans les parties cours et exercices des manuels.
En géométrie plane, les manuels consacrent une part importante aux problèmes de construction. Ceci nous a permis d'analyser les fonctions du dessin dans la résolution de problème.

18 G. Monge, 1820 , p.XVj

La démarche de résolution des problèmes de construction présentée dans ces manuels est une démarche par "analyse - synthèse". Dans la partie "analyse", la figure, au sens de dessin, est présentée comme objet d'étude conduisant à la résolution des problèmes de construction. Il s'agit de la fonction d'expérimentation du dessin, modèle d'un objet géométrique du plan.
Dans la partie "synthèse" nous retrouvons la composante algorithme de construction avec une justification, donc une preuve de constructibilité.
Les algorithmes de construction reposent sur des primitives de construction, que certains manuels appellent "constructions fondamentales". Un dessin est représenté, dans les solutions, sur lequel sont tracées des étapes intermédiaires de la construction. Les aspects techniques de ces tracés ne sont pas explicités dans les corrigés d'exercices. Nous en déduisons qu'ils sont considérés comme étant à la charge de l'élève et/ou de l'enseignant.
Dans les démarches de résolution de problèmes de géométrie[19], présentées dans les manuels, le dessin a la fonction "illustration de l'énoncé". Celle-ci étant à la charge de l'élève puisque les exercices ne sont pas accompagnés d'un dessin. Les auteurs invitent les élèves à rendre visibles sur le dessin toutes les données du problème, avec l'objectif de faciliter sa résolution.

Pour la géométrie dans l'espace, nous n'avons trouvé aucun manuel qui soulève les questions de méthodologie de résolution de problème en géométrie dans l'espace[20]. Les exemples présentés dans le cours et l'analyse des manuels d'exercices corrigés nous ont permis d'étudier la démarche de résolution des problèmes de construction dans l'espace. Il s'agit de la démarche par "analyse - synthèse".
Contrairement au cas de la géométrie plane, la figure n'est pas objet d'étude dans la partie "analyse". Ce qui est conforme à ce que nous avons montré dans le chapitre 1 : a priori la fonction d'expérimentation du dessin "papier-crayon" ne peut pas être remplie, au même titre que dans le plan, en tant que modèle du domaine de réalité "géométrie dans l'espace".
Dans les manuels, des primitives de construction sont explicitées. Elles peuvent être utilisées dans l'algorithme de construction. Cependant, au niveau du tracé, certaines constructions ne peuvent pas être réalisées sans faire appel à des arbitraires. C'est ce que nous avons appelé des règles d'usage. Ainsi, au cours de la période 1, les solutions de problèmes de construction dans l'espace peuvent utiliser la règle d'usage RU, selon

19 Sans spécification de la nature du problème comme problème de construction ou de lieux géométrique.
20 Ceci ne veut pas dire qu'il n'en a pas eu.

laquelle, on peut "représenter de façon arbitraire l'intersection (lorsqu'elle existe) d'une droite et d'un plan; de deux plans".
Pour la géométrie dans l'espace, le problème du tracé est évoqué par certains auteurs de manuels, non par rapport au problème de la précision comme dans le cas de la géométrie plane, mais par la mention qu'on ne peut pas réaliser toutes les étapes de l'algorithme de construction sur un dessin en perspective cavalière. Ceci est interprété comme une insuffisance due au dessin. D'ailleurs, c'est ce qui justifie l'introduction de la géométrie descriptive.

2. TROISIEME PERIODE.

A partir de la réforme de 1982, les problèmes de construction retrouvent leur place dans l'enseignement, d'abord en géométrie plane et ensuite dans la géométrie dans l'espace.
J. Marion (1983) souligne que les activités de construction géométrique constituent un moyen d'atteindre la plupart des objectifs d'enseignement de la géométrie visés par la réforme de 1981-1982. Cette dernière constitue une rupture avec la précédente en prenant en compte certains travaux des groupes des IREM :

> "Depuis quelques années on a vu éclore et se développer, notamment au sein des IREM, des groupes de recherche en didactique de mathématiques, en épistémologie, et sur l'enseignement de la géométrie. La prise en compte de leur travaux a d'abord conduit à une explicitation des objectifs importants attendus d'un enseignement de la géométrie; ces travaux ont également montré que cet enseignement, pour être efficace, doit se fonder sur une stratégie de la connaissance s'appuyant sur les problèmes et les concepts, et non sur une stratégie de légalisation de cette connaissance axée sur l'énoncé des théories."
>
> J. Marion, 1983, p.25

Comme pour la période 1, nous proposons d'analyser la vie des problèmes de construction en géométrie plane et dans l'espace dans les moments où le rapport institutionnel est relativement "stable". Or, cette période a connu quatre programmes en 14 ans. Ainsi, nous pensons que de 1982 à 1987[21], le rapport institutionnel a de forte chances d'évoluer et il se peut qu'il y ait un décalage entre les directives du programme et la vie des objets dans les manuels, comme nous l'avons expliqué dans la problématique (chapitre A, 6.1.1, p.56). Pour ces raisons, nous proposons d'analyser les manuels des éditions entre 1990 et 1995 pour avoir un rapport institutionnel plus stable.

21 Ce qui correspond au premier état du système E_6 (fig. 11, p.61).

2.1. Résolution des problèmes de construction à travers les manuels

Nous nous situons au niveau des classes Seconde et Première pour analyser la résolution des problèmes de construction. En effet, les problèmes de construction en géométrie dans l'espace sont étudiés dans ces deux classes.
La structure des manuels a changé au cours de ce siècle. Pendant la période 3, les chapitres des manuels du lycée se composent de quatre parties [22]:
- Activités préparatoires : ces activités ont pour objectif d'introduire une nouvelle notion, de mettre en évidence, sur des exemples, des propriétés, de rappeler des notions déjà étudiées qui seront des prérequis ...
- Cours : cette partie prend en charge les différents énoncés (définitions, théorèmes, propriétés ...) à retenir. Certains énoncés sont démontrés et illustrés par des exemples.
- Travaux pratiques : ce sont des exercices résolus autours des thèmes définis dans les programmes. Les résolutions sont souvent accompagnées de commentaires ou de méthodes.
- Exercices : ils sont regroupés par catégories.

Comme nous l'avons dit plus haut, nous nous intéressons à la résolution des problèmes de construction dans l'enseignement actuel et aux fonctions du dessin dans cette résolution. Une des fonctions des travaux pratiques est de mettre en place des techniques de résolution, des méthodes. C'est donc l'analyse de cette partie qui nous semble pertinente pour notre étude.

2.1.1. Cas de la géométrie plane

L'étude des problèmes de construction en géométrie plane s'inscrit dans la problématique de résolution de problèmes concernant des configurations ou transformations. Nous proposons d'analyser trois manuels, "Terracher"[23], "Déclic"[24] et "Belin"[25]

a) Analyse du manuel "Terracher"

Aucune définition du problème de construction n'est explicitée dans ce manuel. Cependant, un paragraphe[26] est consacré à l'explicitation de la démarche de résolution

22 Ces parties peuvent avoir d'autres étiquettes selon les manuels. De plus la deuxième et la troisième partie peuvent être menées en parallèle.
23 Nous avons utilisé les manuels de Seconde, 1994, et de Première, 1995.
24 Mathématiques, Première S, géométrie, Hachette, 1995.
25 Nous avons utilisé les manuels de Seconde, 1990, et de Première, 1991.
26 Plus particulièrement dans la partie "travaux pratiques"

des problèmes de construction à la règle et au compas. Certains exercices imposent d'autres contraintes sur les instruments à utiliser :

> Il nous faut cependant tirer au clair, dès maintenant, certaines ambiguïtés:
> - La construction exigée est “claire” dès lors qu'est précisé l'outil de tracé à utiliser: règle seule (c'est-à-dire non graduée), compas ou quelques instruments “fantaisistes” (voir exercice 47 à 49).
> - En revanche, dans d'autres cas, la situation est plus ambiguë.
> Nous conviendrons que, sauf mention explicite du contraire, les tracés usuels (parallèle, perpendiculaire, milieu etc.) sont comme “allant de soi...”.
>
> Terracher, 1°SE, page 25.

Pour les problèmes de construction, l'auteur met en place, sous forme d'un exercice résolu en travaux pratiques[27], une démarche de résolution selon les étapes suivantes : la figure d'étude puis constructions et justification. La première partie constitue la phase de recherche à partir de l'étude de la figure comme le souligne un "point méthode"

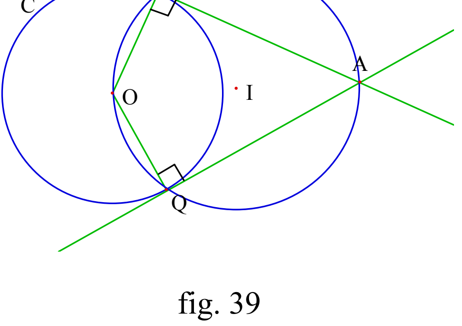
Problèmes de construction
La recherche de tels problèmes s'engage toujours par une **figure d'étude** qui n'est autre que la figure que l'on veut réaliser :
1. *Tricher pour la dessiner* (dans notre exercice, nous traçons *d'abord* les tangentes et nous marquons le point A *ensuite* : c'est “malhonnête”, mais efficace).
2. *Etudier les propriétés de la figure* jusqu'à “en savoir assez” pour passer à l'étape suivante : **donner le programme de construction et justifier.**

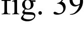
Nous retrouvons dans cette méthode la démarche par "analyse - synthèse", développée dans le paragraphe "période 1". Nous proposons d'étudier le rôle du dessin dans la partie "analyse".
Une fois que le dessin est réalisé, la démarche propose de dégager des propriétés (qu'on utilisera dans la partie synthèse) permettant de réaliser la construction demandée. Souvent on utilise des propriétés de certaines configurations usuelles.
Considérons l'exemple traité dans le manuel Terracher 2°, p.230.

Exercice résolu 1 : Une construction d'Euclide.
Etant donné un cercle C de centre O, et un point A extérieur à C, construire à la règle (non graduée) et au compas, les tangentes au cercle C issues de A."

27 Terracher 2°, 1994, p. 230

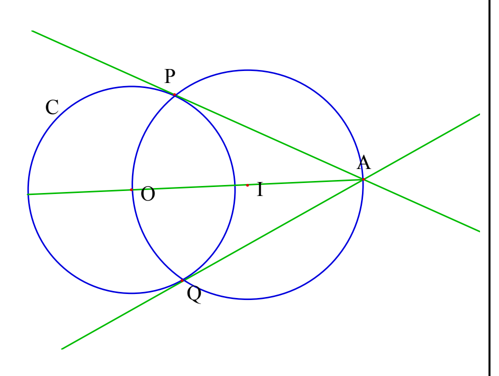
1. La figure d'étude
Voilà ci-contre la figure que nous voulons réaliser :
Compte-tenu en effet de la définition d'une tangente à un cercle, *nous voulons trouver P et Q sur le cercle C de façon que APO et AQO soient des angles droits*.
Le théorème de l'angle droit nous dit que, dans ces conditions, P et Q doivent appartenir au cercle de diamètre [OA].
Résumons : P et Q doivent appartenir au cercle C et au cercle de diamètre [OA].

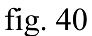



fig. 39

2. Construction et justification
a) Le programme de construction
Construisons, à la règle est au compas, le milieu I de [OA], puis le cercle Γ de diamètre [OA] (qui est évidement de centre I).
Ce cercle rencontre C en deux points P et Q.

b) La justification
Il est clair que OPA et OQA sont des angles droits (cf. Théorème de l'angle droit, Cours, p.219).
Ainsi les droites (AP) et (AQ) sont tangentes au cercle C.



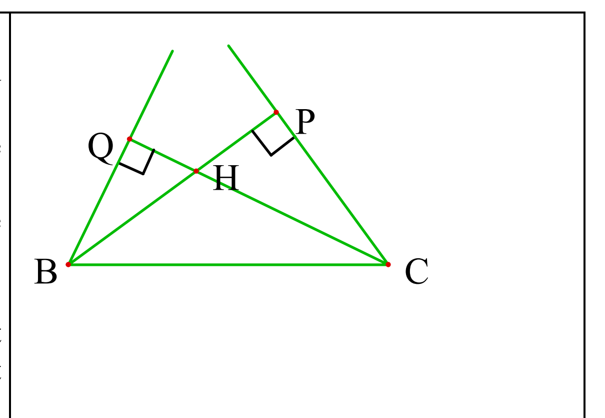

fig. 40

La partie "analyse" propose de réaliser la figure objet de construction, mais sans dire comment la réaliser. Ensuite de dégager des propriétés ou des configurations usuelles. Ces dernières ont pour fonction de mettre en évidence une transformation, un théorème ou une relation entre des objets géométriques. Dans notre exemple, il s'agit du théorème de "l'angle droit".
Ensuite, sont proposés l'algorithme de construction et la justification. L'algorithme de construction reprend les différentes étapes dans l'ordre, et il est accompagné d'un dessin (fig. 40) illustrant des étapes de l'algorithme de construction.
L'aspect expérimental du dessin peut être plus ou moins important selon les cas. Nous illustrons ceci à travers deux exemples.

<u>Exemple 1 (Exercice n°68 p.240, Terracher 2°, 1994)</u>

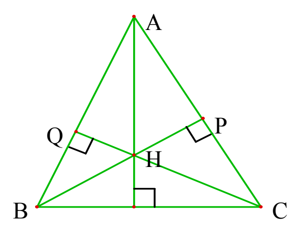
68. Les points B, C et H sont donnés.
Construire un triangle ABC tel que H soit l'orthocentre de ce triangle.

Dans le livre du professeur, l'auteur propose la solution suivante :

68. *Figure d'étude* : il est clair que P et Q appartiennent au cercle de diamètre [BC]. *Construction* : Soit c le cercle de diamètre [BC] : (BH) recoupe c en P et (CH) recoupe c en Q. Nous avons, (théorème de l'angle droit) : (CH) $\perp$ (BQ) et (BH) $\perp$ (CP) Ceci montre qu'en désignant par A le point d'intersection de (BQ) et (CP), H est l'orthocentre du triangle ABC.	

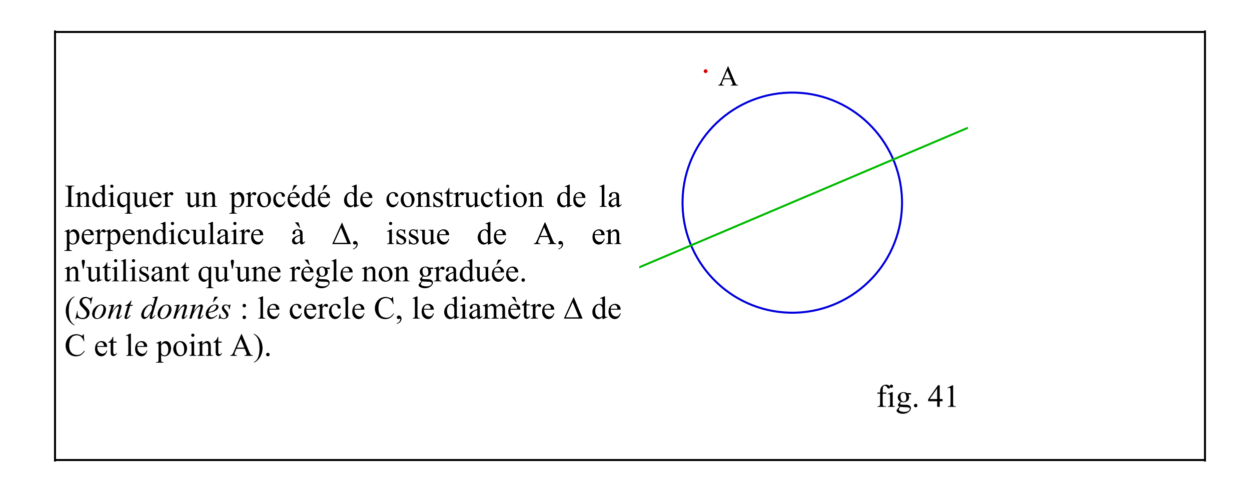
Livre du professeur, Terracher, seconde, 1994, p.97

La partie "analyse" du problème consiste à considérer la figure suivante :
Un triangle ABC et l'orthocentre H



L'analyse de cette figure doit permettre de dégager la configuration du triangle rectangle ou du théorème de l'angle droit.

Exemple 2 (Exercice 40, p25, Terracher 1°SE)



Indiquer un procédé de construction de la perpendiculaire à Δ, issue de A, en n'utilisant qu'une règle non graduée.
(*Sont donnés* : le cercle C, le diamètre Δ de C et le point A).

fig. 41

Des éléments de réponses sont proposés à la fin du manuel :

40. Tracer les droites passant par A et les extrémités B et C du diamètre. Il y a des angles droits cachés ! les trouver et utiliser l'orthocentre du triangle ABC.

Terracher, première SE, 1991, p.267

Le tracé demandé dans l'exemple 2 est :

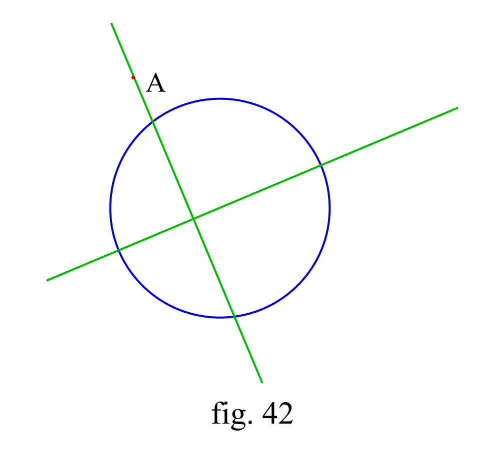


fig. 42

Mais la configuration clé pour la résolution du problème est :

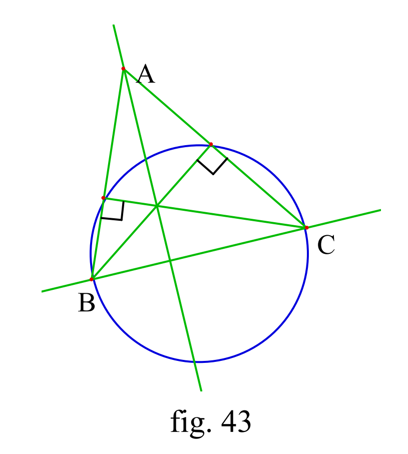


fig. 43

Cet exemple montre que le tracé demandé ne permet pas à lui seul de dégager l'algorithme de construction comme dans le cas de l'exemple 1. Mais il faut réaliser des constructions intermédiaires pour faire apparaître des configurations clés pour la résolution du problème. Soulignons à cet effet que certains auteurs des manuels explicitent l'importance du traitement de la figure dans la phase de résolution du problème.

b) Analyse du manuel "Déclic"

Aucune définition du problème de construction n'est donnée dans ce manuel. Comme le cas du manuel "Terracher", les auteurs de ce manuel explicitent la démarche de résolution de construction "analyse - synthèse". Seulement ces auteurs distinguent les deux phases sous les étiquettes respectives "analyse" et "synthèse".

méthode
Le problème se résout en deux temps :
- Analyse : on suppose le problème résolu.

Faire une figure approximative répondant à l'énoncé en la construisant dans l'ordre inverse.
Montrer que les contraintes imposent à l'un des points cherchés d'appartenir à deux courbes (E1) et (E2).
- Synthèse :

Construire les deux courbes et chercher si leurs(s) point(s) d'intersection conduit(sent)à une solution.
Achever la construction, si elle est possible.

Déclic, 1°S, p.46

La première phase de la partie "analyse" est la réalisation de la figure. Cette méthode propose de faire une construction dans le sens inverse. Les auteurs n'explicitent pas dans cet encadré que le dessin réalisé est un objet d'étude pour la phase heuristique, comme dans le cas du manuel "Terracher". Cependant, dans les exemples traités, le dessin intervient dans la phase heuristique.
Soulignons que la méthode suggérée par les auteurs dans cette partie "analyse" est d'obtenir un point à construire comme intersection de deux courbes. C'est cette méthode qui était utilisée dans la résolution des problèmes de construction en géométrie plane, au cours de la période 1 sous le nom de "intersection de lieux géométriques".

c) Analyse du manuel "Belin"

En classe de seconde, les auteurs donnent une méthode de résolution des problèmes de construction par "analyse - synthèse". Cette même démarche est reprise dans le manuel de la classe de première que nous proposons d'analyser. En effet, dans le manuel de première les auteurs proposent deux démarches dans la partie "analyse".
Dans la méthode proposée, les auteurs (1°S, p 46) distinguent les deux phases "analyse" et "synthèse" comme le cas du manuel Déclic, mais la démarche de la partie "analyse" rejoint celle de Terracher à savoir l'étude de configurations :

<u>METHODE</u>
Comment résoudre un problème de construction
1. Réalisation d'une figure d'analyse. Analyse de la situation.
On suppose l'existence d'au moins une solution au problème posé. On construit artificiellement une figure correspondant à cette solution.
On extrait de la figure la ou les propriétés nécessaires qui vont permettre de réaliser la construction.
2. Synthèse. On revient à la case de départ, mais on a maintenant (grâce à l'analyse) une idée du parcours à suivre : en partant des données initiales exclusivement, on décrit pas à pas la méthode de construction découverte en justifiant chaque étape. Ces justifications peuvent amener à distinguer différents cas (discussion); on effectue la construction dans chacun des cas où elle est possible.

Ensuite, les auteurs (1°S, p.47) montrent comment utiliser cette méthode, en activités de travaux pratiques :

Dans la plupart des problèmes de construction, on procède par « analyse et synthèse ». Mais encore faut-il une «méthode d'analyse». Le plus souvent, elle consiste à **reconnaître**, au milieu des éléments de la figure supposée réussie (en réalité faite à rebours), un **modèle connu** (par exemple un trapèze suggérant une homothétie, ou un parallélogramme, une médiatrice, etc.). Une autre méthode d'analyse, plus originale mais naturelle cependant, consiste à imaginer ce qui se passerait si on libérait l'objet à construire de l'une des **contraintes imposées**.

Ainsi, dans la démarche "analyse - synthèse" deux méthodes sont proposées pour l'analyse. La première est de dégager l'algorithme de construction à partir de l'étude de la figure, et la seconde par abandon de contraintes. Dans les exemples traités, les auteurs soulignent l'importance de la figure pour les deux méthodes. Notons que les problèmes de construction qui illustrent la deuxième méthode d'analyse utilisent la transformation comme outil. Dans ce cas, la partie analyse se fait en deux étapes :
- Soit S_c le système des contraintes imposées pour la construction F. On cherche un sous système de contraintes S_c' de S_c de contraintes de sorte que la construction soit "facile" ou connue. On réalise la construction selon S_c'. On obtient F' (F sous contraintes S_c')
- On cherche comment caractériser la construction sous S_c. C'est à ce niveau que la transformation intervient : on cherche comment passer de F' à F.

d) Fonctions du dessin

De l'étude précédente, on peut retenir les points suivants.
- Les auteurs des manuels mettent l'accent sur l'étude de la figure dans la phase de résolution de problème, en dégageant des propriétés de configurations usuelles. En particulier, pour les problèmes de construction, cette phase correspond à l'"analyse".
Cette méthode met bien en évidence la fonction d'expérimentation du dessin dans la partie analyse.
- Dans la partie synthèse, l'élève est invité à refaire le dessin, pour vérifier l'algorithme de construction.
- Enfin, certaines constructions seront prises en charge seulement au niveau du tracé sans qu'elles soient explicitées dans la partie algorithme de construction.

e) Conclusion

Aucun des manuels consultés n'a défini un problème de construction en géométrie plane. Cependant, ils ont tous explicité la méthode de résolution. Il s'agit de la démarche par "analyse - synthèse". Dans la partie analyse, le dessin est objet d'étude pour dégager l'algorithme de construction. Trois méthodes d'analyse apparaissent dans les exemples traités et explicités dans les manuels : étude de configurations (Terracher et Belin), abandon d'hypothèse (Belin) et intersection de lieux géométriques (Déclic).

2.1.2. Cas de la géométrie dans l'espace

Les premiers problèmes de construction dans l'espace sont introduits en classe de troisième, par la notion de section plane. Cette notion déjà introduite en classe de quatrième, uniquement dans le cas d'une sphère, est élargie au cas des solides.
En fait, la recherche se limite à déterminer la nature d'une section plane parallèle à une face du solide. Pour cela on utilise la propriété:
"Si on coupe une pyramide ou un cône par un plan parallèle à la base, la section obtenue est une réduction de la base".
Dans le cas d'une pyramide, on justifie la propriété ci-dessus, dans une activité, en utilisant:
-une propriété d'incidence dans l'espace
"Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les deux droites d'intersection sont parallèles."
- la propriété de Thalès.
Pour la construction il faut ajouter certaines règles de perspective, en particulier la conservation du parallélisme.

En seconde, les propriétés d'incidence sont abordées. Les élèves doivent savoir identifier l'intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, notamment par l'intermédiaire de la recherche de sections planes de solides.
Les problèmes de constructions sont étudiés uniquement en travaux pratiques et en exercices.
Nous proposons d'analyser trois manuels : "Terracher"[28], "Dimathème"[29] et "Déclic"[30].

a) Manuels "Terracher"

i) <u>Terracher 2°</u>
Le TP n°2, intitulé "Sections planes d'un solide", précise dans l'introduction la nécessité d'une technique de dessin :

> Nous développons ici les problèmes relatifs à la *représentation en perspective cavalière de la section d'un solide par un plan*. Nous aurons besoin pour cela d'introduire une technique de dessin fort utile en la matière : le *tracé hors solide*.[31]

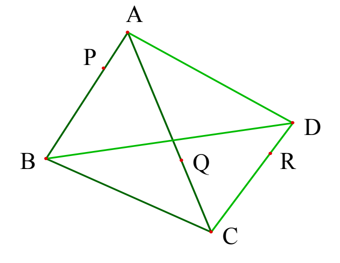
On voit dans cet extrait que la résolution de ces problèmes nécessite un travail sur le dessin.
Ensuite, un exercice résolu montre la construction d'une section plane dans le cas d'un tétraèdre et dans le cas d'un solide[32]. Pour notre analyse, on se limitera au premier cas.

a. Enoncé

Tracer l'intersection dans chaque cas du plan P=(PQR) avec les faces des solides suivants

a) le tétraèdre ABCD





b. Solution
La solution est composée de trois parties :

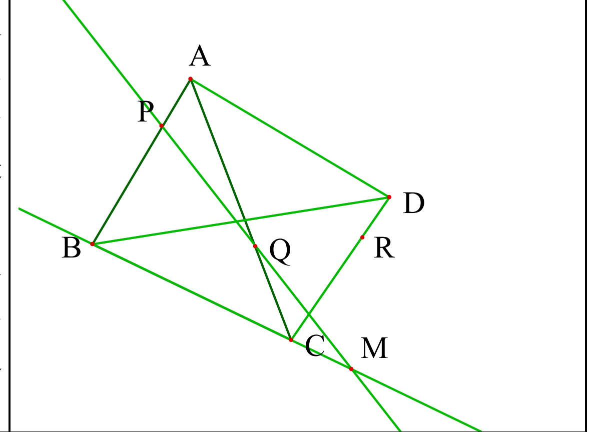
---
28 Terracher, Seconde, 1994 et Terracher, 1°S, 1995.
29 Dimathème, 1°S, 1991.
30 Déclic, 1°S, 1995.
31 Terracher, Seconde, 1994, p.259.
32 l'exemple du cube sera détaillé dans le paragraphe "Terracher 1°S".

1. Le principe

Il propose une idée générale, pour la résolution de problème :

> "*Dès que l'on connaît deux points communs à un plan et au plan contenant la face d'un solide, on connaît l'intersection de ce plan et de la face du solide.*"[33]

2. Le tracé hors solide

Les droites (PQ) et (BC) sont dans le plan (ABC). Lorsqu'elles sont sécantes, il nous faut prolonger les tracés *en dehors du tétraèdre* pour représenter leur point d'intersection M. (Noter que nous disposons alors de deux points communs aux plans P et (BCD), les points M et R ; le principe dégagé en 1 va pouvoir fonctionner.)	

3. Les constructions : cette partie donne le programme de construction de la section plane.

Ensuite, l'auteur présente un encadré "point méthode" expliquant que ces constructions font appel à deux points : la technique du tracé hors solide et l'utilisation des relations d'incidence et de parallélisme. Ce point méthode sera repris dans le manuel de première mais plus détaillé. C'est ce que nous proposons d'analyser.

ii) <u>Terracher 1°S</u>

Comme en classe de Seconde, un TP est consacré au thème "Sections plane d'un solide"[34]. Il propose deux thèmes, représentation en vraie grandeur et représentation en perspective cavalière.

Ensuite l'auteur présente un point méthode que nous précisons ci-dessous.

Point méthode[35]

---

33 Terracher, Seconde, 1994, p.259.

34 Terracher, 1°S, 1991, pp. 248-252.

35 ibid. p.251.

Il porte sur trois points :

1. L'utilisation des propriétés d'incidence

Deux règles d'incidence, d'apparence banale, sont constamment utilisées :
(1) Si deux points sont dans un plan, la droite qui les définit est dans ce plan.
(2) Le point d'intersection de deux droites fait partie de l'intersection de deux plans contenant chacun l'une de ces droites.

2. Le tracé “hors-solide”

La résolution de notre exercice fait comprendre ce que nous entendons par cette expression : dans l'exemple 1, les points α et β, indispensables pour obtenir la section cherchée, ne font pas partie du solide (le cube). D'où la consigne :
Ne pas hésiter à prolonger les tracés partiellement effectués.

3. Une construction standard

Considérons trois faces d'un solide telles que sur la figure ci-contre, P est un point de la première et Q un point de la seconde.
Le tracé ci-contre, analogue à celui de l'exemple, montre que l'on peut toujours construire le point α d'intersection de la droite (PQ) avec le plan de la troisième face.

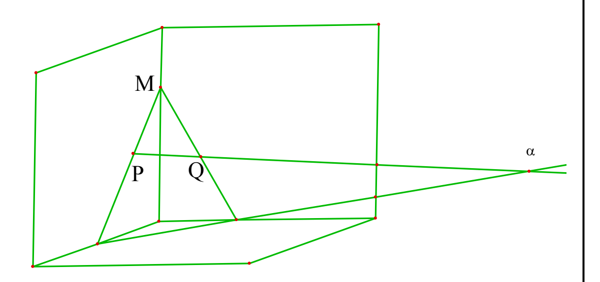


fig. 44

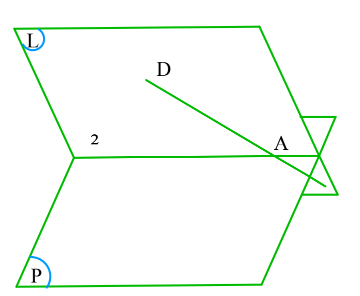
b) Manuel Dimathème

Seul le manuel de Première traite en travaux pratiques les problèmes de construction. Deux thèmes sont abordés : la construction de l'intersection d'une droite avec un plan et la construction de l'intersection de deux plans.

1. **Comment construire l'intersection A d'une droite D et d'un plan P**

D'abord les auteurs présentent (p. 160) la méthode générale :

Prendre un plan auxiliaire L contenant D et coupant P selon une droite Δ : A est le point d'intersection de D et de Δ.



Ensuite, un exercice résolu est proposé pour illustrer cette méthode : il s'agit de déterminer l'intersection d'une droite (MN), où M et N sont deux points de deux faces distinctes d'un cube, avec un plan (ABCD) défini par une face de ce cube.

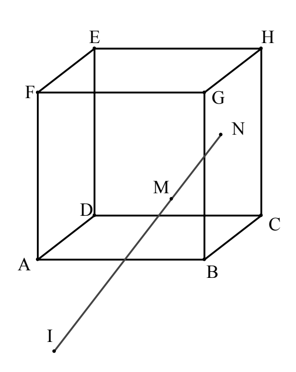


fig. 45

On choisit un plan auxiliaire contenant M, N et dont on peut facilement trouver l'intersection avec (ABCD).

Les auteurs (p. 161) proposent deux choix possibles pour le plan auxiliaire :

- Le plan auxiliaire est le plan (GMN). Le point I est l'intersection de (MN) avec Δ (intersection des plans (GMN) et (ABCD)).
- Le plan auxiliaire est le plan parallèle à (AF) passant par M et N. Δ' est l'intersection de ce plan et de (ABCD). Le point I est l'intersection de (MN) avec Δ'.

2. **Comment tracer l'intersection D de deux plans L et P**

La méthode proposée (p. 162) est:

Il suffit de trouver : + deux points de D. On peut obtenir un point de D en construisant l'intersection de L avec une droite de P. + un point de D et sa direction (en pratique une droite parallèle à D).

c) Manuel "Déclic"

Pour les problèmes de construction, les auteurs proposent deux thèmes en travaux pratiques : la construction de l'intersection d'une droite et d'un plan et la construction d'une section plane. Les deux thèmes proposent des méthodes générales, illustrées par des exemples.

La méthode pour la construction de l'intersection d'une droite et d'un plan proposée par les auteurs (p.144) est :

méthode

La droite D n'est pas parallèle au plan P.

- On choisit un plan Q contenant la droite D et tel que l'on puisse construire la droite Δ, intersection de ce plan Q avec le plan P.
- On cherche, dans le plan Q, le point d'intersection I des deux droites D et Δ.

  I est alors le point d'intersection de la droite D et du plan P.

Dans le cas d'un solide, le plan Q est souvent une face du solide et la droite Δ une arête.

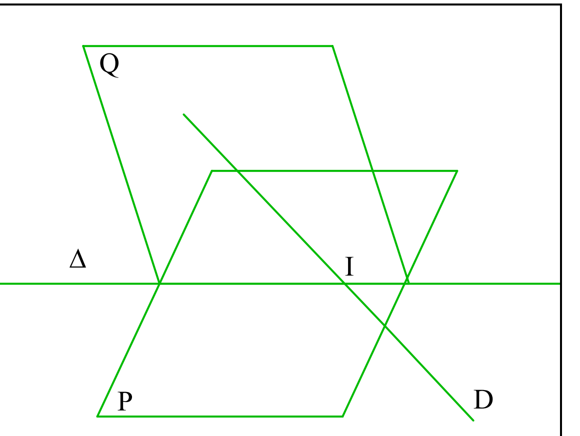


fig. 46

Le plan Q joue le rôle du plan auxiliaire, dans la méthode proposée dans le manuel "Dimathème". Seulement là, on donne un critère pour le choix du plan auxiliaire.

Examinons l'exemple étudié par les auteurs (p. 144) pour illustrer cette méthode.

Enoncé :

Dans la pyramide ABCDE :

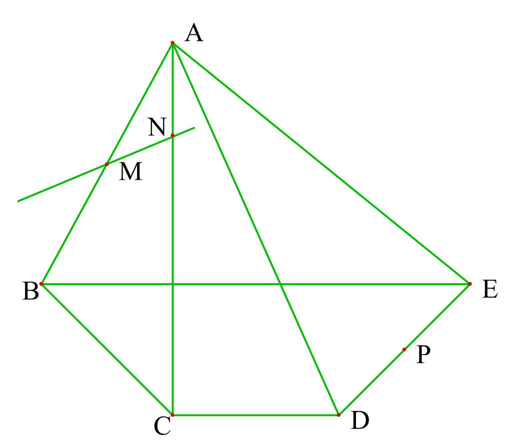
BCDE est un trapèze de bases [BE] et [CD];

M est le milieu du segment [AB];

N est le point du segment [AC] tel que AN = 1/4AC; P est le milieu du segment [DE].

La droite (MN) coupe le plan (ADE) en I.

Construire le point I.



Solution :

- La droite (MN) est incluse dans le plan (ABC).

On détermine la droite d'intersection des plans (ADE) et (ABC) :

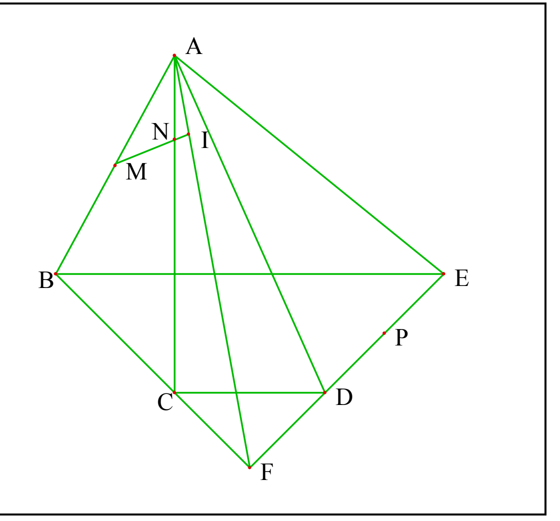
- A appartient aux plans (ADE) et (ABC);
- Dans le plan (BCD), les droites (BC) et (DE) se coupent en F et :

$F \in (ADE) \cap (ABC)$

Les plans (ADE) et (ABC) se coupent donc suivant (AF).

- Dans le plan (ABC), les droites (MN) et (AF) sont sécantes en I.

I est le point d'intersection de la droite (MN) avec le plan (ADE).



Aucune propriété d'incidence n'est énoncée. La solution propose l'algorithme de construction, sans phase heuristique ni justification.

L'algorithme de construction peut être schématisé comme suit :

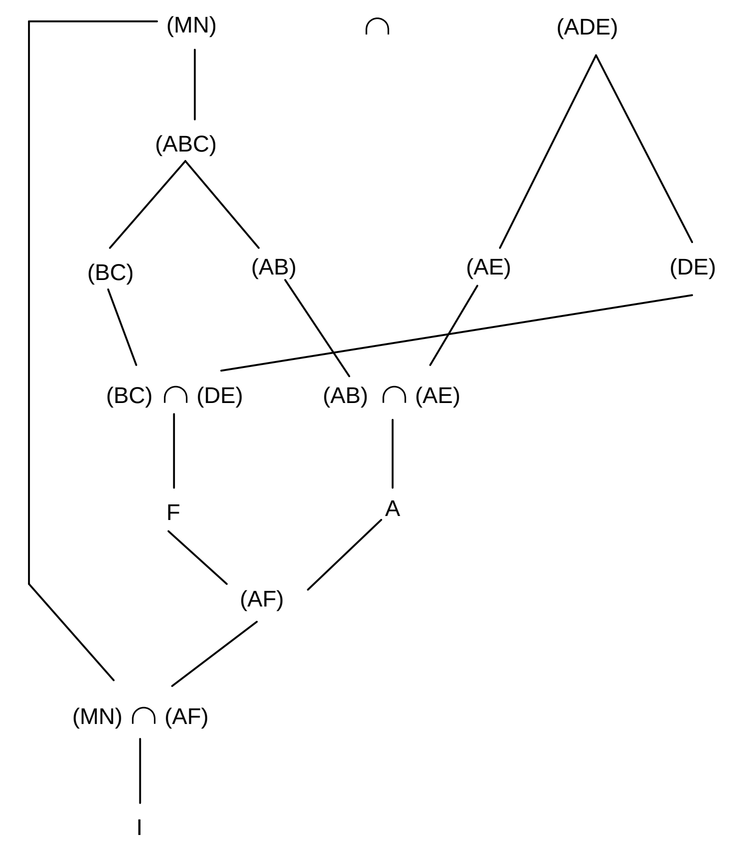


fig. 47

d) Synthèse : caractérisation de la résolution des problèmes de construction dans l'espace

Dans ce paragraphe nous proposons une caractérisation de la résolution des problèmes de construction dans l'espace étudiés dans les manuels.

Tous les objets du problème sont représentés selon les conventions et les représentations-types de la perspective cavalière. Ensuite, tout autre objet ne peut être défini que s'il respecte les règles suivantes :

R1 : Un point est construit s'il est intersection de deux droites construites.

R2 : Une droite est définie (donc construite) si elle passe par deux points construits.

R3 : Un plan ne peut être défini que par trois points construits ou un point construit et une droite construite ou deux droites construites coplanaires.

A cela, il faut ajouter des constructions à la règle et au compas légitimées par les règles de la perspective cavalière : parallélisme, milieu, rapport.

Dans la suite nous désignerons ces primitives de construction par **PCespace(point, droite).**

Notons, que ces constructions sont effectives au sens défini dans le paragraphe (1.2.2, p.142) de ce chapitre. Il s'agit de construction dont le procédé de tracé se fait sans le bénéfice des règles d'usage. Dans ce cas les problèmes étudiés sont des problèmes de construction effective (PCef).

La résolution de ces problèmes peut être caractérisée par l'un des schémas suivant :

i) <u>Intersection de deux plans</u>

Soit à déterminer l'intersection de deux plans sécants P et P'. Une stratégie consiste à caractériser chacun des deux plans P et P' respectivement par deux droites (D1 , D2) et (D'1 , D'2) de sortes que D1 et D'1 soient sécantes et D2 et D'2 soient sécantes.

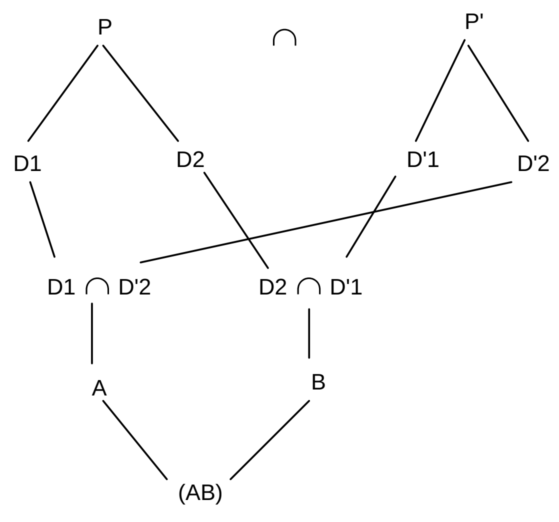


fig. 48: intersection de deux plans

ii) Intersection d'une droite et d'un plan

Soit à déterminer l'intersection d'une droite d avec un plan P'[36].

Si on peut déterminer une droite d' de P' qui soit coplanaire avec d alors il suffit de prendre l'intersection de d avec d'.

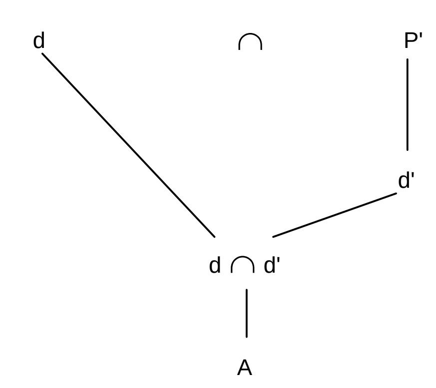


fig. 49: intersection d'une droite avec un plan (a)

Sinon, on choisit un plan P contenant d, de façon que le schéma d'intersection de deux plans soit simple à déterminer selon le schéma "intersection de deux plans". Ce plan est désigné par les manuels par "plan auxiliaire".

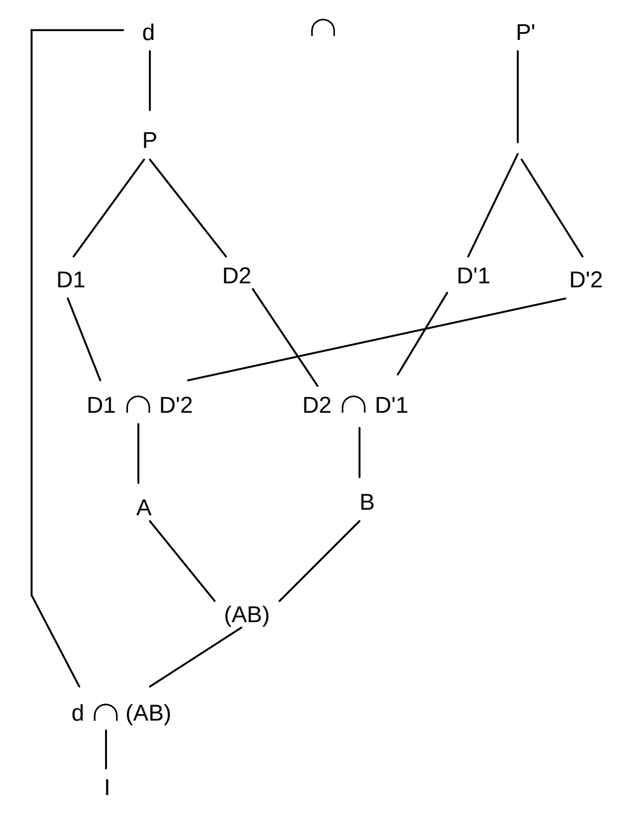


fig. 50 : intersection d'une droite avec un plan (b)

36 On suppose que la droite d est sécante avec le plan P.

Les manuels étudiés ont mis l'accent sur la réalisation effective de la construction sur le dessin. Pour cela, l'algorithme de construction doit permettre la réalisation d'un tracé effectif à la règle et au compas. Pour répondre à cette contrainte, l'algorithme de construction doit respecter les règles R1, R2 et R3, citées ci-dessus. En particulier, pour les problèmes de construction d'intersection d'une droite avec un plan ou de deux plans, celui-ci doit respecter l'un des schémas ci-dessus. Donc, il y a un aller-retour entre les exigences du tracé et de l'algorithme.
Ainsi, les manuels mettent l'accent d'une part sur la méthode générale, selon les schémas ci-dessus, et d'autre part sur des techniques de tracé, qui découlent de l'algorithme. Ces techniques sont : joindre deux points et prolonger des segments représentant les droites.
Conclusion

Les exigences de tracé effectif à la règle et au compas, dans les problèmes de construction en géométrie dans l'espace nécessitent des algorithmes de construction spécifiques caractérisant les problèmes de construction effective.

2.2. Conclusion

Nous avons vu que pour les problèmes de construction de géométrie dans l'espace, on peut réaliser le programme de construction à la règle et au compas, selon les "mêmes" règles que pour les problèmes de construction dans le plan. Les objets de base restent point et droite et non droite et cercle.
Les résolutions proposées dans les manuels ne sont pas les mêmes dans le cas des problèmes de construction du plan que dans l'espace. En effet, nous avons montré dans le paragraphe (2.1.1, p. 149), que pour le cas de la géométrie plane la démarche de résolution se fait par "analyse - synthèse". La première prend en charge la recherche de solution dans laquelle le dessin joue une fonction d'expérimentation. Dans le cas de l'espace, la démarche proposée par les manuels donne l'algorithme de construction en expliquant les techniques sous jacentes, mais le travail sur le dessin dans une phase préalable, comme dans la phase d'analyse des problèmes de construction en géométrie plane, n'est pas fait. Ceci rejoint notre hypothèse selon laquelle le dessin ne peut pas remplir la fonction d'expérimentation en tant que modèle d'un objet géométrique de l'espace.
Dans le cas de la géométrie plane, les commentaires des auteurs sont centrés sur la phase heuristique et en particulier, sur comment dégager à partir du dessin les propriétés et/ou les outils de résolution pour les problèmes de construction en géométrie plane. Alors que pour le cas de l'espace, les auteurs mettent l'accent sur l'algorithme de construction et le tracé. D'ailleurs, les propriétés d'incidence nécessaires à la

justification sont presque absentes dans les corrigés des problèmes de construction dans l'espace. Ceci, nous a conduit à nous demander s'il n'y a pas le risque que les problèmes de construction deviennent des problèmes de combinatoire de tracés pour l'élève.

3. Analyse comparee des types de problemes de construction PCef et PCev dans l'enseignement

Dans ce paragraphe nous proposons une analyse comparée des deux types de problème de construction : effective (PCef) et évoquée (PCev). Pour cela, nous avons adapté le problème P1 du type PCev, étudié dans le paragraphe (1.2.3, p.143), de façon à le transformer en problème de type PCef. Nous désignons ce problème modifié par P2.

3.1. Etude du problème P2

Soit ABCD un tétraèdre, M un point du plan (ABC). Construire une droite Δ passant par M, parallèle au plan (BCD) et sécante avec la droite (AD).

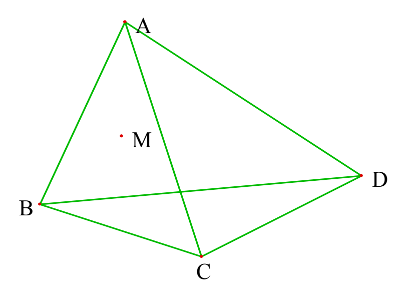


fig. 51

Une solution est (SP2)[37]:
Dans le plan (ABC), on trace la droite (AM). Elle coupe (BC) en I.
On trace la droite (ID).
Par M on trace la droite Δ parallèle à (ID). Δ est donc parallèle à (BCD).
Les droites Δ, (ID) et (AI) sont coplanaires. Comme (ID) est sécante avec (AD), Δ l'est aussi.Donc Δ répond au problème.

37 C'est une solution type telle qu'on la proposerait dans l'enseignement actuel.

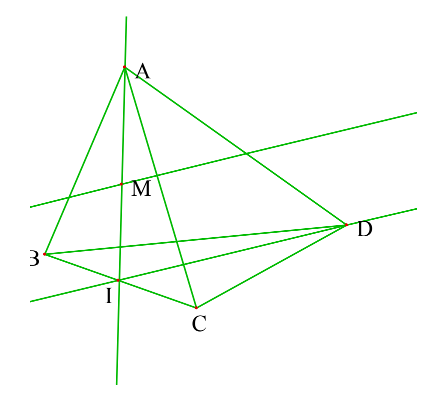


fig. 52

Cet algorithme doit être justifié par les propriétés d'incidence de l'espace.

3.2. Analyse comparée des problèmes P1 et P2

Les deux problèmes P1 et P2 proposent de construire une droite passant par un point donné, sécante avec une droite donnée et parallèle à un plan donné. Dans le problème P2, les données point, droite et plan sont définies à partir d'un solide. Les solutions S1P1 et S2P1 du problème P1 peuvent être considérées comme solution de P2. On les note alors respectivement S1P2 et S2P2.

3.2.1. Examen de la solution S1P2

Par M on trace la parallèle d' à la droite (AD). Comme (AD) est sécante avec (BCD) en D, d l'est aussi. Soit M' le point d'intersection de d' avec (BCD).
Soit Δ la parallèle à la droite (M'D) passant par M. Δ est parallèle au plan P et elle est sécante avec (AD).

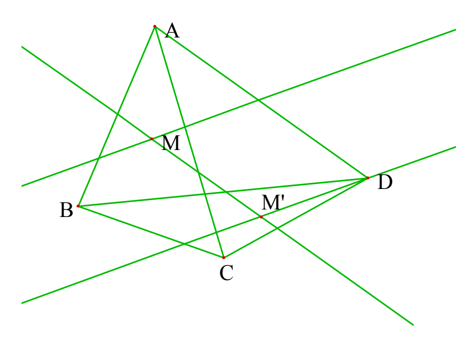


fig. 53

Les solutions S1P1 et S1P2 donnent toutes le même algorithme de construction pour résoudre le problème, cependant au niveau du tracé il y a une différence. En effet, dans la solution S1P1, les points J et K ne peuvent être représentés que de façon arbitraire. En revanche, dans la solution S1P2, on peut proposer une construction effective, c'est-à-dire sans arbitraire.

Dans le tracé ci-dessus, un seul objet a été placé de façon arbitraire : le point M'. Ce point appartient à l'intersection du plan (BCD) et du plan défini par les droites d' et (AD).

3.2.2. Examen de la solution S2P2

Considérons le plan Q défini par le point M et la droite (AD). Les plans (BCD) et Q sont sécants selon une droite d', puisque (AD) est sécante à (BCD) et que M n'appartient pas à (BCD).
Dans le plan Q, le point M n'appartient pas à d', donc il existe une seule droite Δ, passant par M et parallèle à d', donc parallèle à P. De plus elle est sécante avec (AD).

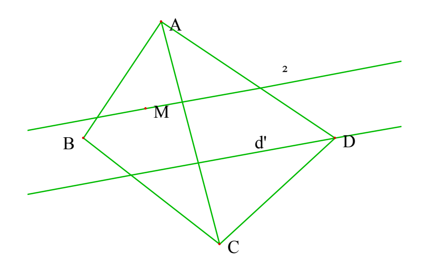


fig. 54

On peut faire les mêmes remarques que précédemment. Les deux solutions S2P1 et S2P2 donnent toutes les deux un algorithme de construction pour résoudre le problème en question. Cependant, au niveau du tracé des figures il y a une différence.
Pour la solution S2P2 on peut aussi proposer une construction effective qui revient à la solution SP2.

3.3. Commentaires

Nous avons modifié le problème 1, qui est un problème de "construction évoquée", en un problème 2, qui est un problème de "construction effective", dans le contexte d'un solide bien choisi. Ensuite, nous avons procédé à une analyse comparée par rapport au type de construction.
Nous avons proposé une solution S1P2 pour le problème P2. Celle-ci donne un algorithme de construction selon les règles PCespace(point, droite, plan)[38] qui est justifié par les propriétés d'incidence. Or, cet algorithme est insuffisant pour obtenir un procédé de tracé à la règle et au compas, en particulier, pour la construction du point M', intersection de la droite d' avec le plan (BCD). Pour cela, un autre algorithme de

38 Il s'agit des règles que doivent vérifier les problèmes de construction dans l'espace pendant la période 1, p. 140.

construction est nécessaire pour répondre à une exigence du procédé de tracé "construction à la règle et au compas", comme dans la solution SP2 par exemple.
Nous nous demandons si ces deux problèmes peuvent coexister à un moment donné dans une institution "enseignement secondaire".
Cette étude comparée des deux problèmes, P1 et P2, a montré que la différence entre ces deux types de problèmes de construction réside essentiellement dans la réalisation effective à la "règle et au compas". Nous pensons alors que les exigences par rapport aux productions d'élèves pour ces deux types de problèmes ne sont pas les mêmes. Cela nous ramène à l'hypothèse de recherche :
Hypothèse de recherche "papier-crayon"

Ces deux types de problèmes ne peuvent pas coexister dans l'environnement papier-crayon, puisque chacun d'eux nécessite un contrat différent par rapport aux productions d'élèves.

C'est du côté du contrat qu'il faut chercher la validation de cette hypothèse, en termes d'attentes des enseignants par rapport aux productions d'élèves relatives aux problèmes PCev et PCef. Ceci fera l'objet du chapitre C3.

4. CONCLUSION

D'après ce qui précède, il nous est possible de comparer les problèmes de construction entre les périodes 1 et 3 par rapport aux caractéristiques suivantes : démarche de résolution, preuve de constructibilité, algorithme de construction et procédé de tracé. C'est ce que nous proposons de faire dans la suite.
Nous avons résumé dans le "Tableau 23" les caractéristiques des problèmes de construction en géométrie plane et en géométrie dans l'espace pour la période 1. De même, et dans le "Tableau 24" les caractéristiques pour la période 3. Dans ces tableaux nous avons précisé les fonctions du dessin dans les problèmes de construction.

Période 1	Géométrie plane	Géométrie dans l'espace
Démarche de résolution	Analyse -Synthèse Le dessin est un objet d'étude	Analyse -Synthèse Le dessin n'est pas objet d'étude.
Preuve de constructibilité	Propriétés d'incidence du plan	Propriétés d'incidence de l'espace
Algorithme de construction	- Constructions à la règle et au compas: PCplan(point,droite,cercle) - Primitives de construction	- Constructions selon PCespace(point, droite, plan) - Primitives de construction

	- Les règles sont explicitées par les auteurs	- Les règles sont explicitées par les auteurs
Procédé de tracé	- Primitives de tracé (à la règle et au compas) - Les auteurs évoquent le problème de précision du tracé	- Primitives de tracé (à la règle et au compas) - Règles d'usage - Les auteurs soulignent l'insuffisance du dessin. Ils renvoient à la géométrie descriptive pour combler ce déficit

Tableau 23

Période 3	Géométrie plane	Géométrie dans l'espace
Démarche de résolution	Analyse -Synthèse Le dessin est un objet d'étude	- Absence de la phase heuristique - Centration sur l'algorithme de construction
Preuve de constructibilité	Propriétés d'incidence du plan	Propriétés d'incidence de l'espace
Algorithme de construction	- Constructions à la règle et au compas : PCplan(point, droite, cercle) - Primitives de construction	- Constructions selon PCespace(point, droite). - Primitives de construction
Procédé de tracé	- Primitives de tracé (à la règle et au compas)	- Primitives de tracé (à la règle et au compas)

Tableau 24

Les problèmes de construction en géométrie plane conservent les même caractéristiques, pendant la période 1 et pendant la période 3. En revanche, pour les problèmes de construction dans l'espace, nous avons montré que leurs caractéristiques (démarche de résolution, algorithme de construction et procédé de tracé) ont évolué.
Pendant la période 1, les problèmes de construction en géométrie plane et dans l'espace utilisent les mêmes démarches de résolution. Mais au niveau du procédé de tracé il y a une différence, étant donné que dans le cas de la géométrie dans l'espace, on fait appel à des primitives de tracé et à des règles d'usage.
Pendant la période 3, les problèmes de construction en géométrie plane et dans l'espace n'ont plus la même démarche de résolution. En géométrie plane, la démarche de résolution se fait à l'aide de l'"analyse-synthèse" largement développée dans les manuels. Alors que pour les problèmes dans l'espace, la phase heuristique est absente et la méthode de résolution proposée par les auteurs des manuels est centrée sur l'algorithme de construction. Cependant, au niveau du tracé, les exigences sont les

mêmes pour les problèmes de construction en géométrie plane et dans l'espace. Il s'agit de procédés de tracé à la règle et au compas.
Autrement dit, les problèmes de construction en géométrie dans l'espace ont évolué non seulement par rapport à l'algorithme de construction (avec les exigences du procédé de tracé) mais aussi par rapport à la démarche de résolution. Mais la construction effective à elle seule n'explique pas ce dernier point. D'où la question[39] :

Question 1

En plus du critère construction "effective / évoquée", y a-t-il d'autres critères permettant de caractériser la différence entre les problèmes de construction en géométrie dans l'espace pendant la période 1 et pendant la période 3 ?

Au sujet des fonctions du dessin dans les problèmes de construction en géométrie dans l'espace, nous avons montré qu'au cours de la période 1, le dessin était seulement un support du raisonnement. De plus, le problème du tracé a été évacué pour les raisons d'insuffisance du dessin dans le mode de représentation en perspective cavalière, et renvoyé à la géométrie descriptive qui le prend en charge. Nous pensons que la production d'un tracé par un élève n'était pas alors nécessaire. En revanche, pendant la période 3, le problème du tracé n'est plus évacué, mais il est l'objet du problème, dans le sens où la démarche de résolution propose un algorithme de construction qui permet d'avoir un procédé de tracé à la règle et au compas. Autrement dit, le tracé est devenu une finalité du problème de construction dans l'espace.
Le dessin est présenté par les manuels comme objet d'étude dans la démarche de résolution des problèmes de construction de géométrie plane. Ce qui n'est pas le cas pour les problèmes de construction en géométrie dans l'espace. Cette différence de fonction du dessin dans la phase heuristique entre les problèmes de construction en géométrie plane et de l'espace confirme la conclusion 3 du chapitre 1, à savoir qu'a priori la fonction d'expérimentation du dessin papier-crayon ne peut être remplie, au même titre que dans le plan, en tant que modèle du domaine de réalité "géométrie dans l'espace".

Ce chapitre nous a permis de caractériser les problèmes de construction en géométrie plane et dans l'espace pour les deux périodes 1 et 3. Et plus particulièrement, de spécifier en quoi les problèmes de construction dans l'espace ont évolué entre la période

39 Il s'agit d'une reformulation de la question 1 soulevée dans la problématique (cf. 6.1.2, p.61).

1 et 3 par rapport aux caractéristiques des problèmes de construction retenues. Ceci nous a conduit à la question :

Question 2

Pourquoi cette évolution du type de problème de construction dans l'espace, entre les deux périodes 1 et 3 ?

Pour répondre à ces questions nous entreprenons, dans le chapitre suivant, une analyse des programmes et des manuels pour chacun des programmes de la période 3. Cette analyse vise à mettre en évidence des contraintes expliquant cette évolution et éventuellement donner d'autres critères qui peuvent caractériser les problèmes de construction dans l'espace durant les deux périodes.

CHAPITRE C2

ANALYSE DES PROBLEMES DE CONSTRUCTION DANS L'ESPACE APRES 1982

Nous avons mis en évidence, dans le chapitre précédent, une évolution des problèmes de construction dans l'espace : des problèmes de construction évoquée pendant la période 1923-69 aux problèmes de construction effective pendant la période 1982-94. De plus, nous avons donné les premiers éléments pour caractériser la différence entre la vie de ces deux types de problèmes de construction dans la résolution des problèmes.
Nous proposons dans ce chapitre d'expliquer et d'avancer des hypothèses sur les raisons de cette évolution des problèmes de construction au cours de ce siècle. Pour cela, nous entreprenons d'analyser des programmes et des manuels lors de différents états du programme après la réforme des mathématiques modernes.

En d'autres termes, nous cherchons les contraintes susceptibles d'expliquer l'évolution des problèmes de construction entre les périodes 1923-69 (période 1) et 1982-94 (période 3). Pour quelle raison les manuels proposent-ils les problèmes de construction effective depuis 1982 ? Pour cela, il faut interroger l'institution "programmes officiels" des différents programmes au cours de la période 3. Ces contraintes peuvent être exprimées dans les discours de la noosphère. Cela nous permet de répondre à la question 2 (soulevée dans la conclusion du chapitre C1)

L'analyse des manuels est complémentaire de celle des programmes. En effet, elle peut valider et affiner les résultats de l'analyse des programmes.
En particulier, nous cherchons à voir si au cours de la période 3, les problèmes de construction évoquée sont proposés également par les manuels. Cette question rejoint celle de la coexistence des problèmes de construction effective et problèmes de construction évoquée. (Cf. Question 3, A- 6.1.2, p.50)

Ensuite, nous proposons de répondre à la question 1 soulevée dans la conclusion du chapitre précédent, sur l'existence de critères autres que ceux de construction effective et évoquée, pour caractériser l'évolution des problèmes de construction ente les périodes 1 et 3.

1. ANALYSE DES PROGRAMMES DEPUIS LA FIN DE LA REFORME DES MATHEMATIQUES MODERNES

Nous entreprenons dans ce paragraphe l'analyse de l'évolution des programmes au cours de la période 3, par rapport aux thèmes suivants : géométrie dans l'espace, dessin et problèmes de construction. Cette étude a été faite à travers les textes des programmes : 1972, 1982, 1985 et 1990. L'examen des programmes de 1972 nous permettra de repérer s'il y a une rupture dans les programmes par rapport à ces thèmes au cours de la réforme 1977-82.

Notons que pour les classes de Première et Terminale, un nouveau programme a été édité en 1994. Nous signalerons des modifications éventuelles du programme dans la partie synthèse, pour chacun des thèmes.

1.1. Géométrie dans l'espace

1.1.1. Programmes de 1972

En Sixième, il s'agit d'étudier les objets physiques, cubes, cylindres, etc., donnant lieu à des mesures, masses, volumes, masses volumiques. C'est en classe de Cinquième que l'étude des objets géométriques de l'espace se met en place.

> “Première étude concrète de l'espace
> (Il s'agit d'une simple description ; on révisera d'abord les notions correspondantes dans le plan).
> Droites, demi-droites, segments, plans, demi-plans, positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan; de deux plans; droites et plans perpendiculaires; sommets, faces et arêtes d'un tétraèdre et d'un pavé oblique” (Programme de Cinquième, Arrêté du 19 mars 1970)

Ensuite, la géométrie dans l'espace est absente des programmes des classes de Quatrième, Troisième et Seconde.

Dans les classes de Première et Terminale, l'espace est étudié en tant qu'espace vectoriel, affine et euclidien.

1.1.2. Programmes de 1982

Le programme du collège se réduit à "des observations sur des solides, des lignes ..."[1] et à la mise en place du vocabulaire pour les objets géométriques qui modélisent les objets physiques de l'espace : plans horizontaux; droites verticales; plans verticaux ....

---

1 B.O. n° 22 bis du 9 juin 1977.

Notons que la géométrie dans l'espace est absente des programmes des classes de Quatrième et Troisième.

Pour la classe de Seconde le programme propose les thèmes suivants :

- Perpendiculaire commune à deux droites. Distance de deux droites.
- Représentation d'un solide par des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires bien choisis
- Représentation par perspective cavalière
- Exemples de figures admettant un centre, un axe, un plan de symétrie; cercle cube, tétraèdre régulier ...

(Instructions du programme de 2°, 1982)

Deux modes de représentation sont présents en Seconde en tant qu'objets d'enseignement.

En classe de Première, on étudie l'espace avec un point de vue vectoriel. L'espace n'est plus défini comme un espace vectoriel en soi, mais on définit et on étudie les propriétés des vecteurs comme une extension des vecteurs du plan en tant qu'espace vectoriel, puisque la notion du plan comme espace vectoriel reste au programme de Première. Mais aucune théorie des espaces vectoriels n'est au programme, comme le souligne le programme de Première :

> “Le professeur procèdera à un rappel rapide (sans démonstration) des propriétés des opérations sur les vecteurs du plan. En vue de faciliter la communication, il donnera la définition d'un espace vectoriel ...
> Aucune théorie générale des espaces vectoriels et des applications linéaires n'est au programme.” (Programme de Première, Arrêté du 19 mars 1982).

En classe de Terminale C et E, l'étude de l'espace se fait à travers la notion de calcul barycentrique et les transformations.

1.1.3. Programmes de 1985

Dans le programme de la classe de Sixième, un paragraphe est consacré à l'étude de l'objet de l'espace : parallélépipède rectangle. Ceci permet de dégager la notion d'orthogonalité et le parallélisme dans l'espace.
Les travaux dans l'espace s'amplifient en classe de Cinquième. En effet, les objets étudiés sont les prismes droits et les cylindres de révolution. Le travail sur l'orthogonalité et sur le parallélisme se poursuit grâce à l'étude de ces objets.

> "Des activités sur le parallélépipède rectangle ont permis de retenir, sous la forme d'images mentales, des situations de parallélisme et d'orthogonalité. Ce travail se poursuit grâce à l'étude de quelques autres prismes droits et du cylindre de révolution. L'expérience ainsi acquise permettra de dégager et de mettre en oeuvre sur des exemples simples les propriétés du parallélisme et de l'orthogonalité dans l'espace, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible des élèves" (Programme de 5°, B.O. n° spécial 4-30 Juillet 1987)

Un nouveau solide n'appartenant pas à la famille des polyèdres est introduit en classe de Quatrième : la sphère. Pour la classe de Troisième, il s'agit d'étudier les objets pyramide et cône de révolution ainsi que la notion de section plane parallèle à la base.

Pour la classe de Seconde les notions et les thèmes n'ont pas changé par rapport aux programmes de 1982. En revanche, le programme est plus explicite et il met davantage l'accent sur la pratique du dessin comme représentation des objets de l'espace physique et sur la maîtrise des solides usuels.

En classe de Première, la reconstruction des propriétés d'incidence à partir du calcul vectoriel, comme c'était le cas en 1982, est exclue. Les propriétés d'incidence complètent celles qui sont vues en Seconde à partir d'activités spécifiques sans l'intervention des vecteurs. Un lien avec le calcul vectoriel peut se dégager par la suite.

1.1.4. Programmes de 1990

Le programme du collège est le même que celui de 1985. En revanche, au lycée, on peut constater un changement important dans les programmes.

Les solides étudiés au collège constituent un terrain privilégié pour l'ensemble des activités du lycée. En particulier, en classe de Seconde, ces activités permettront de :
- "dégager progressivement ***quelques énoncés concernant les droites et les plans de l'espace*** et mettre en valeur leur spécificité par rapport au cas de la géométrie plane"[2],
- mettre en évidence et mettre en oeuvre les propriétés d'incidence, d'orthogonalité, de projection sur un plan.

Le programme de Première introduit l'étude des transformations opérant sur les objets usuels étudiés, l'extension du vecteur à l'espace et la notion de barycentre. L'étude de ces notions se poursuit en classe de Terminale :

---

2 B.O. n° 20 du 17 mai 1990.

“ **En géométrie dans l'espace**, l'objectif, plus modeste mais relativement essentiel, est de développer la maîtrise des objets usuels de l'espace étudiés dans les classes précédentes et de quelques **transformations élémentaires** opérant sur ceux -ci.” (B.O. n°2 - 2 mai 1991)

1.1.5. Synthèse

Nous constatons une évolution des programmes de géométrie dans l'espace au niveau collège entre 1982 et 1985 et au niveau lycée entre 1985 et 1990.
Pour les programmes de 1994, il faut noter que les transformations dans l'espace ne sont plus au programme de Terminale.

	1982	1985	1990
6°-5°	Observation d'objets physiques et géométriques. Mise en place du vocabulaire des objets géométriques : plan horizontal, droite verticale...	Etude de situations de parallélisme et d'orthogonalité à partir des solides : parallélépipède rectangle (6°), prisme droit et cylindre de révolution (5°).	Cf. 1985
4°-3°		- Travaux sur la sphère: section par un plan; aire et volume (4°) - Pyramide et cône de révolution - section par un plan parallèle à la base	Cf. 1985
2°	Propriétés d'incidence; parallélisme; orthogonalité; projections; repère cartésien; calcul de distances, aires, volumes	idem 1982 Mise en relation avec les autres parties du programme.	À partir de l'étude des objets usuels - Etude de droites et plans. - Propriétés d'incidence. - Orthogonalité. - Projection sur un plan.
1°	- Aspect vectoriel et analytique. - *Notions de géométrie descriptive* (facultative)	- Propriétés d'incidence comme en seconde puis lien avec le vectoriel. (Espace vectoriel : hors programme)	- Poursuite de l'étude des objets et configurations simples de l'espace. - Propriétés d'incidence. - Notion de vecteurs. - Barycentre.
Ter	- Calcul barycentrique - Transformations de l'espace - *Géométrie descriptive* (E)	Action des transformations sur les configurations usuelles de l'espace	- Maîtrise des objets usuels déjà étudiés. - Transformations élémentaires : leur action sur les configurations usuelles. - Produit vectoriel. - Barycentre.

Tableau 25

Soulignons d'abord qu'au collège, la géométrie dans l'espace "passe" de l'observation d'objets physiques et la mise en place de vocabulaire géométrique au niveau Sixième et Cinquième (1982) à l'étude de solides et l'étude de situations mettant en oeuvre des notions de parallélisme et d'orthogonalité à partir de l'étude des solides (1985 à nos jours). De plus, la géométrie dans l'espace est au programme des différentes classes du collège.

Au lycée, les programmes ont nettement changé au cours de cette période. Dans les programmes de 1982, l'étude des solides est absente, il y a une prédominance des structures vectorielle et analytique. Seulement, la notion d'espace vectoriel n'est pas un objectif en soi, comme dans le cas des précédents programmes. Cette notion disparaît dès les programmes de 1985. Cependant, l'accent est mis sur l'étude des propriétés d'incidence en classe de Seconde et de Première, dès les programmes de 1985.

Dans les programmes de 1990 et 1994, la maîtrise des objets usuels est une exigence pour l'ensemble des classes du lycée. De plus, c'est à travers l'étude des solides usuels que les notions et les propriétés d'incidence de la géométrie dans l'espace se mettent en place en classe de Seconde.

Nous retenons donc :

la tendance des programmes depuis 1982 :
- la géométrie dans l'espace du collège est une "géométrie du solide". (1985)
- la mise en place de la géométrie affine (propriétés d'incidence en particulier) s'appuie sur l'étude des solides usuels. (1990)

1.2. Dessin en géométrie plane

1.2.1. Programmes de 1972

Dans les rubriques définissant le contenu du programme, aucune mention relative au dessin n'est faite. Cependant, dans les instructions particulières des programmes, nous avons relevé deux passages à propos du dessin.
Les programmes de Sixième et Cinquième font référence aux activités sur le dessin afin de constater des propriétés spatiales, avant de passer au raisonnement pour justifier.
Au lycée, les instructions du programme de la classe de Première précisent :

> “même quand il s'agit d'êtres mathématiques qui ne représentent pas l'espace physique, schémas et figures sont utiles. Dans un espace affine de dimension n = 2 on dessinera de telles figures à la règle sur une feuille; pour n = 3, on les dessinera en perspective ou en géométrie descriptive (section E)”. (Programme de Première, Instruction n°71 - 17 du 14 janvier 1971).

Le dessin est relativement marginal dans l'ensemble des programmes de l'enseignement secondaire.

1.2.2. Programmes de 1982

Au début du collège, l'objectif est d'apprendre l'usage d'instruments pour la réalisation de dessin : "le dessin géométrique plan, avec des instruments, sera pratiqué"[3]

En Quatrième et Troisième l'expérience acquise sur le dessin est le point de départ de la géométrie plane :

> “ la géométrie partira de l'expérience acquise avec le dessin géométrique. Des observations physiques, bien choisies, conduiront à dégager des faits expérimentaux qui seront présentés comme « propositions initiales », à partir desquelles seront déduites, par voie logique, des conséquences, illustrées par des figures soignées; leur recherche développera l'imagination des élèves et leurs qualités de raisonnement.” (B.O. n° 22 bis du 9 juin 1977)

Le dessin géométrique est un lieu d'observations de faits expérimentaux. Ces faits sont des relations spatiales présentées comme des propriétés ou axiomes géométriques. Une deuxième fonction du dessin est d'illustrer des propriétés qui se déduisent à partir des propriétés déjà énoncées.

Pour le lycée, seuls les textes de Première explicitent les fonctions du dessin. Il permet de développer "l'intuition géométrique" :

> "L'intuition géométrique sera développée par l'emploi fréquent de figures, concernant aussi bien les ensembles de vecteurs que les ensembles de points."
>
> (Programme 1°. B.O. n° 30, 1982)

Que signifie pour l'institution programmes "l'intuition géométrique" ? Est-ce que c'est pour illustrer une notion, pour mettre en place une notion, pour aider au raisonnement ? L'insuffisance de l'explicitation des programmes ne nous permet pas de répondre à ces questions. Cependant, dans les thèmes proposés par le programme, une fonction du dessin dans la résolution des problèmes de construction est mentionnée : "l'analyse des propriétés d'une configuration" figure parmi les diverses méthodes pour la résolution de problèmes de construction.

1.2.3. Programmes de 1985

Le contenu des programmes de 1985 est plus explicite que celui de 1977. En particulier, le programme de Sixième précise les grandes lignes à propos des activités sur les

---

3 B.O. n° 22 bis du 9 juin 1977

dessins : décrire, reproduire, réaliser un dessin donné sous plusieurs formes, reconnaître une figure dans une situation complexe[4]. Les activités sur le dessin permettent la mise en place des notions et des propriétés géométriques tout au long du collège. Par exemple, à propos des transformations étudiées au collège, les programmes de la classe de Quatrième précisent :

> “Comme en Sixième et Cinquième, les activités porteront d'abord sur un travail expérimental permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures à partir desquelles se dégageront de façon progressive les propriétés conservées par translation ou rotation, propriétés qu'on exploitera dans des tracés” (Programmes Quatrième, B.O. n° 25 du 30-06-88)

Le programme de Troisième précise que tous les travaux font appel aux figures[5] usuelles.
Donc, au niveau collège, l'objectif fondamental est la description et la représentation des objets géométriques par un dessin. Les travaux sur le dessin en géométrie plane permettent de dégager des notions et des propriétés géométriques.

Au lycée, seul le programme de la classe de Première, explicite les fonctions du dessin. En effet, parmi les quatre objectifs essentiels de la géométrie plane, les programmes précisent que le dessin doit être utilisé dans la partie heuristique du problème et aussi dans la production de la solution : “ la mise en oeuvre de figures à tous les stades de la recherche et de la rédaction” (Programmes de 1°SE, B.O. n°26, 1985).

1.2.4. Programmes de 1990

Aucune modification des programmes du collège par rapport à ceux de 1985. En revanche, l'ensemble des programmes du lycée définit comme objectif : "la pratique des figures est centrale".

1.2.5. Synthèse

Le dessin est presque absent dans les programmes de 1972. Dès 1982, les programmes précisent le rôle du dessin dans l'enseignement des mathématiques. Ainsi, les activités sur le dessin en géométrie plane figurent parmi les objectifs principaux des programmes de 1982 et 1985.

---

4 Cf. Annexe C1a

5 Les programmes utilisent les deux mots "dessin" et "figure". Il est difficile de cerner la différence entre ces deux mots. Cependant, nous remarquons que le mot "dessin" est utilisé essentiellement au collège pour les activités de réalisation et de reproduction, alors que "figure" est plutôt utilisé au lycée.

Enfin, les programmes de 1990 et 1994, proposent une seule formulation "la pratique des figures est centrale", pour les trois classes du lycée[6].

	1982	1985	1990
6°-5°	Réalisation de dessin à l'aide d'instruments	Réalisation de dessin à l'aide d'instruments	Cf. 1985
4°-3°	La géométrie plane partira de l'expérience acquise sur le dessin	- Réalisations de dessin à l'aide d'instruments (4°) - Tous les travaux font appel aux figures usuelles (3°)	Cf. 1985
2°			Pratique des figures centrale
1°	- Emploi fréquent des figures pour l'ensemble des vecteurs et des points en géométrie plane. - Analyse des propriétés d'une configuration pour les problèmes de construction en géométrie plane.	Figures à tous les stades de la recherche et de la rédaction de solution des problèmes.	Pratique des figures centrale
Ter			Pratique des figures centrale

Tableau 26

Nous faisons l'hypothèse que la mention "la pratique des figures est centrale" renvoie aux objectifs explicités dans les programmes précédents : "emploi fréquent des figures", "analyse des propriétés d'une configuration pour les problèmes de géométrie", "figures à tous les stades de la recherche et de la rédaction de solution de problèmes". Autrement dit, nous supposons que l'institution "programmes" estime[7] que les objectifs développés dans les précédents programmes à propos du dessin sont devenu transparents pour les acteurs (auteurs des manuels, enseignants, ...).
Nous retenons donc,

Depuis 1982, les programmes successifs accordent de plus en plus l'importance à la pratique du dessin à différents stades de la résolution de problèmes de géométrie plane.

1.3. Dessin en géométrie dans l'espace

1.3.1. Programmes de 1972

La représentation des objets géométriques de l'espace est absente des programmes du collège.
Au lycée, seules les sections E étudient les représentations d'objets de l'espace dans la partie "géométrie descriptive".

6 Les programmes du collège sont les mêmes que ceux de 1985.
7 cf. Chapitre A, paragraphe 6.1.1, p.56

1.3.2. Programmes de 1982

La représentation des objets géométriques de l'espace est absente des programmes du collège.
En classe de Seconde, deux modes de représentation sont proposés à titre de thème d'étude :

> "-Représentation d'un solide par des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires bien choisis
> - Représentation par perspective cavalière" (Instructions du programme de 2°, 1982)

Un thème sur la représentation des solides usuels à l'aide des projections orthogonales est proposé pour les classes de Première (facultatif pour Première S et obligatoire pour Première E) .

1.3.3. Programmes de 1985

La représentation d'objets géométriques est un des objectifs des programmes du collège. En particulier, les élèves doivent savoir représenter en perspective cavalière les solides étudiés et leurs patrons.
Le programme de Seconde est plus explicite et il met davantage l'accent sur la pratique des dessins comme représentations des solides usuels.
En classe de Première, on poursuit les objectifs de la classe de Seconde quant à la représentation des objets de l'espace. L'emploi des représentations graphiques est au centre des différentes activités, comme le soulignent les instructions officielles de la classe de Première :

> "Pour l'ensemble des activités sur les configurations de l'espace, les élèves doivent être entraînés à l'emploi systématique de représentations graphiques : croquis avec ponctuation, projection orthogonale sur un plan bien choisi, dessin en vraie grandeur d'une section plane... Mais aucune connaissance n'est exigible sur la géométrie descriptive et la perspective cavalière." (Instructions du programme de 1°, 1987).

Cet extrait nous montre que la géométrie descriptive n'est pas hors programme mais qu'aucune connaissance n'est exigible en ce qui la concerne.

1.3.4. Programmes de 1990

Aucun changement pour les programmes du collège.

Le programme de la classe de Seconde, précise, dans les directives générales, que "la pratique des figures est centrale" aussi bien en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace.

> "En géométrie plane comme en géométrie dans l'espace, tout point de vue axiomatique est exclu. La pratique des figures doit tenir une place centrale, car elle joue un rôle décisif pour la maîtrise des notions mathématiques mises en jeu." (B.O. n° 20 du 17 mai 1990)

Le dessin doit jouer un rôle important non seulement pour la mise en place des notions mathématiques mais aussi pour leur "maîtrise".
Pour les activités, le programme suggère selon le type de problème d'exploiter les maquettes d'objets ou leurs représentations (à main levée ou à l'aide d'instruments).

Le seul mode de représentation adopté est la perspective cavalière. La pratique de règles de la perspective cavalière doit permettre la réalisation de sections planes, comme le suggère le programme de la classe de Première :

> “Exemples simples de recherche (en perspective cavalière ou en vraie grandeur) de sections plane …
> On s'assurera qu'ils ont une bonne pratique des règles permettant la réalisation de tels croquis, mais tout exposé sur la perspective est exclu”. (B.O.n°2 - 2 mai 1991)

1.3.5. Synthèse

C'est en 1985 que les textes du programme du collège explicitent pour la première fois l'usage de la représentation en perspective cavalière de quelques solides usuels.
Sont au programme de Seconde et Première la représentation d'un solide par projections orthogonales (1982 et 1985) et la représentation en perspective cavalière.
Dans les programmes de 1990 et 1994, la pratique des figures est centrale pour l'ensemble des classes. La seule représentation retenue est la perspective cavalière.

Nous constatons qu'il y a un décalage dans les déclarations des programmes, relatives au dessin, entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace. Plus précisément, les déclarations des programmes sur l'importance du dessin en géométrie plane ont précédé le cas de la géométrie dans l'espace. De plus, les programmes sont plus explicites sur la place du dessin en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace. En effet, dans le cas de la géométrie dans l'espace, l'accent est d'abord mis sur la représentation des objets de l'espace dans les programmes de 1982 et de 1985 et, contrairement au cas de la

géométrie plane (cf. paragraphe 1.2.5, p.181), aucun objectif sur le rôle du dessin dans la résolution de problème de géométrie dans l'espace n'est défini par les programmes. Cela rejoint la conclusion 3, du chapitre A (cf.6, p.51), selon laquelle la fonction du dessin papier-crayon ne peut pas être remplie au même titre que dans le plan.
Seuls, les programmes de 1994 proposent une seule formulation "la pratique des figures est centrale aussi bien en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace".

	1982	1985	1990
6°-5°		Représentation en perspective, de quelques solides et patrons.	Cf. 1985
4°-3°		Usage des représentations en perspective et de la fabrication des patrons. (3°)	Cf. 1985
2°	- *Représentation d'un solide par des PO sur 2 plans perpendiculaires bien choisis.*[8] - Représentation par PC.	idem 1982. Plus d'accent sur la pratique des figures comme représentation d'objets de l'espace.	Pratique des figures centrale
1°	*Représentation, à l'aide des projections orthogonales, de solides tels que tétraèdres réguliers, cubes, prismes, pyramides [1].*	Emploi des représentations graphiques: croquis, projection orthogonale sur un plan bien choisi, dessin en vraie grandeur d'une section plane (mais géométrie descriptive et PC non exigibles)	- Pratique des figures centrale - S'assurer qu'ils ont une bonne pratique des règles permettant la réalisation de sections ... en PC. Mais tout exposé sur la PC est HP.
Ter			Pratique des figures centrale

Tableau 27[9]

Comme dans le cas de la géométrie plane, nous nous interrogeons sur ce que signifie la mention "la pratique des figures est centrale". Est-ce que c'est dans le même sens qu'en géométrie plane ? (cf. 1.2.5, p.181). Des différentes rubriques des programmes, il ressort que seules les activités de représentation des solides en perspective cavalière et la réalisation de sections planes de solide sont proposées. A ce propos, le manuel Terracher (1°S, 1990 et 1994) explicite l'expression "la pratique des figures est centrale" dans les objectifs du chapitre "Géométrie et calcul vectoriel dans l'espace" :

8 Nous avons représenté dans les tableaux tout ce qui se réfèrent à la géométrie descriptive en italique.
9 [1] : obligatoire pour la première E et facultatif pour les autres sections.
PC : Perspective cavalière
HP : Hors programme

I. OBJECTIFS
« Géométrie dans l'espace, la pratique des figures doit tenir une place centrale.»
Cette phrase, extraite des programmes, fixe l'objectif de ce chapitre de Géométrie dans l'espace.
L'introduction du **calcul vectoriel** et la mise en place des premiers éléments de **Géométrie analytique**, constituent l'essentiel du contenu du présent chapitre et vont permettre de renforcer les outils dont nous disposons jusqu'à présent, à savoir *les propriétés d'incidence.*
Ce sont les *solides* usuels (Tétraèdre, parallélépipède, mais également sphères, cylindres, cônes ...) qui seront l'objet de nos préoccupations :

- Etudier les **propriétés géométriques** (alignement, concours, parallélisme, orthogonalité, ...)
- Calculer les **grandeurs** qui leur sont rattachées (distances, angles, aires, volumes, ...)
- Effectuer les **représentations planes** des solides eux-mêmes ou d'une section par un plan (en vraie grandeur ou en perspective cavalière).

Voilà explicitée l'expression : « *la pratique des figures* ...»
(Terracher, 1°SE, 1991, p.226

Nous retenons,

A partir des programmes de 1985, sont proposées des activités sur la représentation en perspective cavalière des solides et la réalisation de sections planes des solides usuels.

1.4. Problèmes de construction en géométrie plane

Les problèmes de construction sont absents des programmes de 1972.
En 1982, les problèmes de construction sont essentiellement au programme de Seconde et Première à titre de thèmes indicatifs:

> “ Problèmes de constructions : rôle des diverses méthodes (analyse des propriétés de configuration, recours à une transformation, emploi de l'outil algébrique, ...).” (Programme de Première, B.O. n° 30, 1982)

En 1985, les programmes introduisent des activités sur les constructions au collège. Ainsi, les programmes de Sixième accordent une "grande" place aux activités de construction.

> “Elle[10] accorde une grande place à l'activité de construction, de réalisation de dessin, de résolution de problèmes, ... ”(Programme de 6°, B.O. n° spécial 4-30 Juillet 1987)

10 La démarche à utiliser

Tout au long du collège, les programmes des différentes classes explicitent les compétences à développer chez les élèves. Cependant, il n'y a aucune explicitation des programmes du lycée à propos des problèmes de construction.

Enfin, à partir de 1990, les problèmes de construction sont au programme de toutes les classes du collège et du lycée.

	1982	1985	1990
6°-5°		- Construire les figures usuelles - Construire une parallèle ..., une perpendiculaire ... à la règle et au compas	Cf. 1985
4°-3°		- Droites remarquables d'un triangle - Triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier - Une quatrième proportionnelle (3°)	Cf. 1985
2°	Problèmes de construction		Problèmes de construction
1°	Problèmes de construction		Problèmes de construction
Ter			Problèmes de construction

Tableau 28

Nous constatons que les problèmes de construction en géométrie plane se sont mis en place progressivement à travers les différents programmes.
Les programmes de 1982 proposent pour la résolution des problèmes de construction en géométrie plane, la mise en oeuvre de diverses méthodes parmi lesquelles l'étude de configurations. Les programmes de 1985 et 1990, ne donnent aucune précision à ce propos.
Cependant, l'analyse des éditions 1990 de manuels développée dans le chapitre C1 montre que l'étude des configurations est un point essentiel pour la résolution des problèmes de construction. En fait, la démarche de résolution des problèmes de construction en géométrie plane n'a pas changé au cours de cette période 3.

1.5. Problèmes de construction en géométrie dans l'espace

Les problèmes de construction sont absents des programmes de 1972.
Les textes des programmes de 1982, 1985 et 1990 mentionnent les problèmes de construction dans l'espace uniquement en classe de Première.

En 1982, les problèmes de construction sont proposés dans le cadre des "thèmes facultatifs".

Les programmes distinguent deux compétences, présentées séparément, relatives aux problèmes de construction :
- la résolution des problèmes de construction par la mise en oeuvre des transformations de l'espace :

> “Utilisation de transformations simples de l'espace, telles que translations et homothéties, pour la résolution de problèmes de constructions.” (Programme de 1°, B.O. n°30, 1982)

- la détermination d'intersection d'objets géométriques par la technique de l'épure. Celle-ci est destinée à la section E (facultatif pour les sections S).

Autrement dit, dans la première compétence, la représentation est évacuée. De même, l'étude de configuration n'est pas présentée comme méthode de résolution des problèmes de construction comme le cas de la géométrie plane.

En 1985, les problèmes de construction sont proposés en "Travaux pratiques". Il s'agit de la recherche de sections planes de solides usuels :

> “Exemples simples de recherche de sections planes (sections de prismes de pyramides par des plans parallèles au plan de base; méridiennes et parallèles de surfaces de révolution).” (Instructions du programme de 1°, 1986)[11]

La résolution de ces problèmes peut faire appel aux deux modes de représentation : perspective cavalière et géométrie descriptive.

En 1990, les problèmes de construction sont de même nature que ceux de 1985, mais le seul mode de représentation utilisé est la perspective cavalière :

> “Exemples simples de recherche (en perspective cavalière ou en vraie grandeur) de sections plane …
> On s'assurera qu'ils ont une bonne pratique des règles permettant la réalisation de tels croquis, mais tout exposé sur la perspective est exclu.” (Programme de Première, B.O. n°2 - 2 mai 1991)

[11] Arrêtés des 14 mars 1986 et 30 juin 1986. B.O. spécial n°1 du 5 février 1987.

	1982	1985	1990
6°-5°			
4°-3°			
2°			
1°	- *Intersection de deux plans, orthogonalité d'une droite et d'un plan par la technique de l'épure.[1]* - *Exemples de déterminations de sections planes de polyèdres. [1]* - Utilisation de transformations simples de l'espace, telles que translations et homothétie, pour la résolution de problèmes de constructions.	- Recherche de sections planes avec des solides usuels (en TP). - Dessin en vraie grandeur d'une section plane	Recherche et représentation (en perspective cavalière ou en vraie grandeur) de sections planes.
Ter			

Tableau 29

[1] : obligatoire pour la première E et facultatif pour les autres sections.

Nous retenons,

Les problèmes de construction en géométrie dans l'espace sont au programme des classes de Première.
A partir de 1985, les problèmes de construction dans l'espace sont des problèmes de recherche de sections planes de solide.

Pour les problèmes de construction dans l'espace, nous constatons une évolution du type de problème au cours de cette période 1982 - 90. En 1982, les problèmes de construction sont présentés par les programmes comme des problèmes dont l'objectif est la mise en oeuvre des transformations dans l'espace. Ces problèmes ne sont pas présents dans les programmes de 1985 et 1990. Cela peut être expliqué par le fait que les transformations ont disparu du programme de la classe de Première.
Les programmes de 1985 et 1990 proposent un autre type de problème de construction : "sections planes de solides"[12]. Nous soulignons que les programmes de 1990 associent les problèmes de construction aux problèmes de représentation en perspective cavalière : "Recherche et représentation (en perspective cavalière ou en vraie grandeur) de sections planes."

12 Ce type de problème est proposé par le programme de 1982 : obligatoire pour la section E et facultatif pour la section S.

A propos des problèmes "Sections planes d'un solide"

Les problèmes de "sections planes" sont proposés par les programmes de 1982, mais en tant que problème de représentation en géométrie descriptive pour les sections E.
Ces problèmes ont été également étudiés pendant la période 1, dans le cadre de l'étude des polyèdres. Cette étude constitue une partie importante du programme de la géométrie de l'espace. En particulier, l'étude des prismes, des pyramides et des polyèdres semblables. Les problèmes de sections planes, au cours de la période 1 sont : déterminer la nature d'une section plane avec des solides, comparer deux sections planes parallèles. Ces études permettent en particulier de définir des solides ou des courbes à partir des solides, d'étudier quelques grandeurs liées au solide comme le volume. De plus, la résolution de ces problèmes ne nécessite pas la mise en oeuvre de propriétés d'incidence dans l'espace, comme dans le cas des problèmes de sections planes étudiés au cours de la période 3, et ils ne sont pas présentés comme des problèmes de construction.
Par ces remarques, nous voulons souligner que les problèmes dits de "sections planes", ont rempli des fonctions différentes selon les époques. L'analyse des manuels, des éditions 1990 faite dans le chapitre C1, montre que les problèmes de "sections planes" sont des problèmes de construction dont l'objectif est la mise en oeuvre des propriétés d'incidence de l'espace. La représentation de la section plane exige une maîtrise des règles de la représentation en perspective cavalière.

1.6. Conclusion

L'analyse des différents programmes au cours de la période 3, a mis en évidence les orientations de l'institution "programmes de l'enseignement secondaire" relatives à la place du dessin, des problèmes de construction et de géométrie dans l'espace.

Nous avons montré que, dès la fin de la réforme des mathématiques modernes, le dessin a repris une place importante dans l'enseignement, ainsi que l'étude des configurations, d'abord dans le plan puis dans l'espace. Ceci rejoint la position de certains acteurs de la noosphère, que nous avons développée dans le chapitre A, quant au rôle du dessin dans l'enseignement des mathématiques.

Pour les problèmes de construction en géométrie dans l'espace, les programmes distinguent "problèmes de construction" et "problèmes de représentations relatives aux problèmes de construction". Ces dernières dépendent du mode de représentation choisi et de l'importance qu'accordent les programmes au dessin dans les activités de

géométrie dans l'espace. Ainsi, en 1982 les programmes n'accordent guère d'importance au dessin en géométrie dans l'espace. Cela peut expliquer que les problèmes de représentation relatifs aux problèmes de construction ne sont pas au programme de Première S. Cependant, ils relèvent de la section E, qui a pour vocation une formation scientifique et technique, où la géométrie descriptive est enseignée.
Dès 1985, les programmes introduisent les problèmes de représentation associés aux problèmes de construction. Nous pensons que ceci s'inscrit dans la ligne directrice des programmes de l'enseignement secondaire. En particulier, le programme de la classe de Première précise : "pour l'ensemble des activités sur les configurations de l'espace, les élèves doivent être entraînés à l'emploi systématique de représentations graphiques" (Instructions du programme de 1°, 1987). Dans les programmes de 1990, les problèmes de construction et de représentation sont présentés sous la même étiquette. Nous désignerons cette orientation par *Orientation "Dessin"* . Dans le chapitre C1, nous avons montré, à travers l'analyse des manuels, que cette orientation s'est traduite par des exigences de production des procédés de tracés à la règle et au compas dans les problèmes de construction en géométrie dans l'espace. Ces exigences nécessitent des algorithmes de construction spécifiques, caractérisant les problèmes de construction effective. Nous considérons l'orientation "Dessin" comme une contrainte sur la vie des problèmes de construction dans l'espace.

Nous avons vu que la tendance des programmes au cours de la période 1982 - 90 est que la géométrie dans l'espace au collège est une géométrie du solide et qu'au lycée elle doit s'appuyer sur l'étude du solide. Nous désignerons cette orientation par *Orientation "Solide".* Nous considérons l'orientation "Solide" comme une contrainte sur la vie des problèmes de construction dans l'espace.

L'analyse des éditions 1990 de manuels faite dans le chapitre C1, montre que les problèmes de construction dans l'espace tels qu'ils sont proposés répondent aux deux orientations des programmes "Représentation" et "Solide". En effet, ces problèmes portent sur les solides usuels et font appel aux représentations en perspective cavalière de l'intersection des objets. Notons que l'objectif de ces problèmes est la mise en oeuvre des propriétés d'incidence de l'espace. Ainsi, la mise en oeuvre des règles de la perspective cavalière ne constitue pas un objectif de ces problèmes de construction. En effet, la représentation en perspective cavalière n'est pas un objet d'enseignement, mais un mode de représentation que les élèves doivent maîtriser pour la représentation des sections planes.

2. ANALYSE A TRAVERS LES MANUELS DES PROBLEMES DE CONSTRUCTION DEPUIS LA FIN DE LA REFORME DES MATHEMATIQUES MODERNES

Pour chacun des trois programmes, 1982, 1987 et 1990, nous proposons d'analyser les manuels selon une méthodologie explicitée dans le paragraphe suivant. Notons que les éditions de 1994 présentent les mêmes exercices que ceux de 1990.

2.1. Méthodologie d'analyse

L'analyse a été faite par rapport aux trois réformes: 1982, 1986 et 1990, et pour les deux niveaux : Seconde et Première. Elle comporte un aspect qualitatif et un aspect quantitatif.

2.1.1. Aspect qualitatif

Nous cherchons à étudier le type de problèmes de construction proposé dans les manuels au cours de la période 3.
L'analyse de la résolution des problèmes de construction dans les manuels des éditons 1990 (cf. Chapitre C1) a mis en évidence que ces problèmes permettent la mise en oeuvre des propriétés d'incidence de l'espace et les règles de la représentation en perspective cavalière. Pour cela, nous proposons d'étudier l'importance qu'accordent les manuels aux problèmes de représentation des objets de l'espace et aux problèmes d'incidence.

a) Type I: Représentations et tracés

Ces exercices ont pour objectifs :

- un travail sur les conventions de représentation : on demande de traduire sur un dessin des objets et des relations géométriques de type "sécante", "passant par"...
- la mise en oeuvre des règles de la représentation en perspective : changement de point de vue, différentes vues de face d'un objet, représentation d'une partie manquante...
- la réalisation des patrons et des maquettes.

Certains exercices nécessiteront la mise en oeuvre des propriétés d'incidence, de façon plus ou moins implicite. Ils visent, en plus, une mise au point des règles et des conventions

b) Type II: Problèmes de construction

L'analyse des manuels nous a permis de mettre en évidence deux catégories de problèmes de construction :
- les problèmes où la tâche demandée est la construction de l'intersection de deux objets géométriques, qu'on notera "PC-intersect"
- Les problèmes où la tâche demandée est la construction d'un objet géométrique vérifiant des conditions d'incidence, qu'on notera "PC-Obj/cond".

Nous avons distingué ces deux types de problèmes pour la raison suivante. Les problèmes de construction en géométrie dans l'espace sont du type "PC-Obj/cond" au cours de la période 1 et du type "PC-intersect" dans les manuels actuels. En quoi ces deux types de problèmes diffèrent-ils au niveau de la résolution ? Nous reprendrons cette question dans le paragraphe 3 de ce chapitre[13].

Nous distinguerons également les problèmes de construction avec ou sans solide. Ceci nous permettra de voir l'importance de la contrainte "solide".

Les critères retenus pour la caractérisation des problèmes de construction sont donc :
- construction effective ou construction évoquée,
- construction avec ou sans solide,
- construction de l'intersection de deux objets ou construction d'un objet sous des conditions géométriques.

c) Type III: Problèmes d'incidence (sans construction)

Dans ces exercices, la tâche est d'étudier ou de démontrer une relation d'incidence entre des objets de l'espace. Aucune construction n'est demandée. Cependant, un dessin peut aider à résoudre le problème. Il a comme fonctions essentielles : visualiser, illustrer.

2.1.2. Aspect quantitatif

Nous nous sommes intéressés à la place occupée par chaque type de problèmes, afin d'en mesurer l'évolution dans le temps et dans les manuels. Dans chaque manuel, nous avons relevé le nombre d'exercices relatifs à chaque type.

2.2. Choix des manuels

Pour faire une analyse comparative des manuels par rapport aux différents critères ci-dessus, et pour repérer leur évolution, nous avons opté pour les manuels les plus utilisés actuellement et qui sont accessibles pour au moins les deux derniers programmes.

Nous avons retenu:

<u>Editions 81-82</u> : Dimathème, Hachette, Louquet

13 p. 200

Editions 86-87 : Dimathème, Transmath, Terracher
Editions 90-91: Dimathème, Transmath, Terracher

2.3. Editions 1981-82

Pour Dimathème, il s'agit de sa première édition en 1981-82. Hachette et Louquet sont des manuels édités au moins pour la deuxième fois. Louquet conserve la même structure de présentation et le même esprit que la précédente édition, sous l'influence de la réforme des mathématiques modernes. Hachette semble s'aligner sur les directives des nouveaux programmes.

Désormais, nous utiliserons dans les tableaux ci-dessus le codage suivant :
- PCev : problème de construction évoquée,
- PCef : problème de construction effective,
- AS : avec solide,
- SS : sans solide,
- Obj/condition : construction d'un objet sous conditions géométriques,
- intersect : construction de l'intersection de deux objets.

	Hachette			Dimathème			Louquet		
Editions 1981-82	2°	1°	**Tot**	2°	1°	**Tot**	2°	1°	**Tot**
Représentation	5	0	**5**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCev - AS - Obj/cond	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCev - AS - intersect	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCev - SS - Obj/cond	3	0	**3**	2	0	**2**	4	0	**4**
PCev - SS - intersect	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCef - AS - Obj/cond	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCef - AS - intersect	1	0	**1**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCef - SS - Obj/cond	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCef - SS - intersect	7	0	**7**	0	0	**0**	2	0	**2**
Incidence sans constr	21	2	**23**	17	0	**17**	18	0	**18**
Total	37	2	**39**	19	0	**19**	24	0	**24**

Tableau 30

Nous avons relevé 72 exercices pour les trois types d'exercices. L'ensemble de ces exercices sont proposés uniquement en classe de seconde (sauf 2).

2.3.1. Type I : Représentations et tracés

Seul le manuel Hachette propose des exercices sur la représentation et le nombre d'exercices est faible.
Etant donné qu'il s'agit des premières éditions après la fin de le réforme des mathématiques modernes, la pratique de la représentation n'est pas centrale. (Cf. Tableau 27108F, p.185).

2.3.2. Type II : Problèmes de construction

Ils sont minoritaires (un peu plus d'un quart). Pour l'ensemble des manuels, 19 exercices sur 72 sont des problèmes de construction dont 9 évoquées et 10 effectives. Les exercices ne portent pas sur des solides (sauf 1). De plus, il y a autant de problèmes "PC-intersect" que "PC-Obj/cond".
Dimathème ne propose que 2 exercices (PCev - SS - Obj/cond). Louquet propose 4 exercices (PCev - SS - Obj/cond), les mêmes proposés dans la précédente édition, et 2 nouveaux du type (PCef - SS - intersect), pour ce dernier type Hachette en propose 7.

2.3.3. Type III : Problèmes d’incidence (sans construction)

48 exercices sont proposés par les trois manuels. Ils représentent plus de la moitié des exercices.

2.4. Editions 1986-87

Il s'agit de la première édition pour Terracher et Transmath. Le manuel Dimathème étant dans sa deuxième édition, s'aligne par rapport aux programmes.
Nous avons relevé 138 exercices pour les trois types de problèmes. Ceci représente le double d'exercices relevés dans les éditions 1981-82.
Contrairement aux éditions précédentes, des exercices de type "Problèmes de construction" (type II) et "Problèmes d'incidence sans construction" (type III) sont proposés plutôt en Première qu'en Seconde dans le manuel Dimathème. Ceci peut s'expliquer par le fait que les nouveaux programmes de première marquent à leur tour une rupture avec la réforme des mathématiques modernes et qu'ils ont pour objectifs de

compléter les propriétés d'incidence vues en seconde, la recherche de sections planes et les activités sur les configurations de l'espace.[14]

	Terracher			Dimathème			Transmath		
Editions 1986-87	2°	1°	**Tot**	2°	1°	**Tot**	2°	1°	**Tot**
Représentation	7	1	**8**	0	0	**0**	7	0	**7**
PCev - AS - Obj/cond	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCev - AS - intersect	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCev - SS - Obj/cond	0	0	**0**	0	2	**2**	1	0	**1**
PCev - SS - intersect	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCef - AS - Obj/cond	3	0	**3**	0	1	**1**	0	0	**0**
PCef - AS - intersect	8	2	**10**	2	29	**31**	2	0	**2**
PCef - SS - Obj/cond	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCef - SS - intersect	5	1	**6**	1	3	**4**	2	0	**2**
Incidence sans constr	3	2	**5**	14	24	**38**	17	1	**18**
Total	26	6	**32**	17	59	**76**	29	1	**30**

Tableau 31

2.4.1. Type I : Représentations et tracés

15 exercices sur 138 sont proposés par les manuels Transmath et Terracher. Le manuel Dimathème propose seulement à titre d'activités préparatoires des exercices du type 1. (Cf. 2.1.1 de ce chapitre)

2.4.2. Type II : Problèmes de construction

62 exercices sur 138 portant sur les problèmes de construction sont proposés par les trois manuels. Ce qui montre que les problèmes de construction ont pris une place importante dans le corpus d'exercices. On peut remarquer qu'ils sont plus importants dans le manuel Dimathème : 38 exercices.
Seulement 3 exercices sont des problèmes de construction évoquée, 47 exercices portent sur les solides.
On peut noter également une mise en place du type d'exercice (PCef - AS - intersect) de façon importante (43 sur 62)

2.4.3. Type III : Problèmes d’incidence (sans construction)

14 Cf. Chapitre C1, p. ??

Les problèmes d'incidence sans construction sont en augmentation par rapport aux éditions de 1982-83. C'est toujours le manuel Dimathème qui en propose le plus (38 sur 61).
Nous l'expliquons par le fait que les propriétés d'incidence sont au programme de la classe de Première dans les textes de 1985. (Cf. Tableau 25, p.178).

2.5. Editions 1991

Nous avons utilisé les mêmes manuels que ceux du programme de 1986.

	Terracher			Dimathème			Transmath		
Editions 1991	2°	1°	**Tot**	2°	1°	**Tot**	2°	1°	**Tot**
Représentation	19	2	**21**	0	0	**0**	10	0	**10**
PCev - AS - Obj/cond	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCev - AS - intersect	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCev - SS - Obj/cond	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCev - SS - intersect	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCef - AS - Obj/cond	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCef - AS - intersect	14	6	**20**	10	1	**11**	6	13	**19**
PCef - SS - Obj/cond	0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	**0**
PCef - SS - intersect	0	0	**0**	2	4	**6**	1	0	**1**
Incidence sans constr	4	0	**4**	12	16	**28**	16	4	**20**
Total	37	8	**45**	24	21	**45**	33	17	**50**

Tableau 32

Par rapport à la répartition des exercices entre la classe de Seconde et la classe de Première, Terracher conserve les mêmes proportions alors que les manuels Dimathème et Transmath inversent les rapports par rapport aux éditions précédentes. Nous l'expliquons par le fait que les programmes présentent les objectifs de Première comme étant les mêmes que de ceux de Seconde par rapport aux problèmes de construction et comme étant complémentaires en ce qui concerne les propriétés d'incidence. Ce qui laisse les auteurs de manuels faire un découpage entre Seconde et Première sur les exercices portant sur l'incidence ou sur la construction.

2.5.1. Type I : Représentations et tracés

Leur nombre croît chez Terracher et Transmath. Ils proposent 31 exercices de ce type, essentiellement en classe de Seconde. Dimathème adopte la même position que dans l'édition précédente par rapport aux problèmes portant sur la représentation.

2.5.2. Type II : Problèmes de construction

Soulignons qu'il n'y a plus aucun problème de construction évoquée. Les 57 exercices proposés par les manuels sont des problèmes de construction effective portant sur la construction d'intersections dont 50 sont avec le contexte solide et 7 sans solide.

2.5.3. Type III : Problèmes d'incidence (sans construction)

Les problèmes d'incidence sans constructions occupent toujours une place importante, sensiblement la même en proportion (44% en 1985 et 37% en 1990).

2.6. Conclusion

Nous avons relevé des variations entre les manuels à propos d'un type d'exercice pour des éditions de la même année. Cette variation est due au moins aux facteurs suivants :

- La première édition d'un manuel présente des différences par rapport aux manuels existants relatives à la vie de certains objets d'enseignement. Par exemple, Dimathème en 1982 puis Terracher et Transmath en 1986.
- Pour les éditions de 1982, nous avons constaté des différences entre les manuels par rapport aux types de problèmes proposés. Ceci est une conséquence de la rupture présentée par les programmes de 1982. En effet, les programmes de 1982, présentent de nouvelles orientations, directives, de nouveaux objets, de nouvelles interrelations entre objets, ... etc. Donc selon que les auteurs adhèrent ou non aux nouvelles orientations et directives des programmes officiels, suivant la façon dont ils les ont interprétées, les objets connaissent des existences diverses selon les manuels. Cependant, dans les éditions qui suivent, il y a une convergence entre les manuels et il se met en place une tradition.
- Lorsque l'institution "programmes" définit pour deux classes les mêmes objectifs ou des objectifs complémentaires à propos des "objets de savoir", le découpage sur le contenu d'enseignement, à propos de ces objets, pour les deux classes peut varier d'un manuel à un autre.

Ces différences entre les manuels ont été relevées essentiellement entre 1982 et 1987, période marquant la fin de la réforme des mathématiques modernes et l'apparition des nouveaux manuels. A partir de 1990, on remarque une stabilité quant à la vie d'objets d'enseignement entre les différentes institutions "manuels de Seconde" et "manuels de Première". Cela correspond à ce que nous avons développé dans le paragraphe "évolution du système d'enseignement" de la problématique (cf. chapitre A, p.56). En effet, nous avons considéré que la dynamique du système d'enseignement se fait dans le sens d'une stabilité de la vie des objets et des interrelations entre eux dans la période de

1982 à nos jours. Ainsi, plus on s'éloigne de 1982, moins la différence entre les manuels est significative quant à la vie des objets d'enseignement.

Sans tenir compte des spécificités des manuels, le tableau ci-dessous résume l'évolution des types de problèmes selon les éditions 1982, 1987 et 1991. Il indique, pour chaque type de problèmes, le nombre total des exercices relevés dans les trois manuels utilisés pour l'analyse. Ce nombre représente le potentiel de problèmes offerts par les trois manuels aux enseignants car nous supposons que les enseignants consultent et utilisent différents manuels pour les exercices. Rappelons que les éditions de 1994 présentent les mêmes exercices que les éditions de 1991. Cela correspond à une stabilité de la vie de ces objets d'enseignement.

	1982	1987	1991
Représentation	5	15	31
PCev - AS - Obj/cond	0	0	0
PCev - AS - intersect	0	0	0
PCev - SS - Obj/cond	9	3	0
PCev - SS - intersect	0	0	0
PCef - AS - Obj/cond	0	4	0
PCef - AS - intersect	1	43	50
PCef - SS - Obj/cond	0	0	0
PCef - SS - intersect	9	12	7
Incidence sans constr	48	61	52

Tableau 33

Nous constatons que les problèmes de représentation (type I) sont en hausse : 5, 15 puis 31. Les problèmes de construction (type II) ont triplé entre 1982 et 1987, ensuite le nombre des problèmes s'est stabilisé. Pour les problèmes d'incidence sans construction (type III), nous trouvons pratiquement le même nombre pour les trois programmes.

Les problèmes de construction évoquée (PCev) sont proposés sans le contexte "solide", ils demandent la construction d'un objet sous des conditions géométriques. Le nombre de ces problèmes a baissé entre 1982 et 1987 (de 9 à 3), puis ces problèmes ont disparu des éditions de 1991. Parallèlement, le nombre des problèmes de construction effective a augmenté : 10 en 1982, presque autant que les problèmes de construction évoquée, puis 59 en 1987 et 57 en 1991.

Ces résultats montrent qu'après 1982, les deux types de problèmes se sont mis à vivre dans certains manuels. Mais sous certaines contraintes, seuls les problèmes de

construction effective ont résisté. De plus, ils ont pris une place importante dans les éditions de 1987 et 1990.

En 1982, 9 exercices sur 10 de problèmes de construction effective (PCef) ne portaient pas sur des solides. Dès 1987, ce sont les problèmes de construction effective avec solide qui sont largement représentés : 47 sur 59. Ceci est une conséquence de la contrainte "solide".
Dès les éditions de 1987, les problèmes de construction effective, avec solide et dont la tâche est la construction d'une intersection ("PCef - AS - intersect") sont majoritaires (43 sur 47). Ils sont les seuls à apparaître dans les éditions de 1991.
Enfin, dans les éditions de 1991 et 1994, où on peut considérer qu'il y a une stabilité et une tradition par rapport à la vie des objets d'enseignement dans les institutions "manuels de Seconde et de Première", seuls deux types de problèmes de construction sont proposés dans les manuels : problèmes de construction effective, avec solide et dont la tâche est la construction d'une intersection ("PCef - AS - intersect") (50) et problèmes de construction effective, sans solide et dont la tâche est la construction d'une intersection ("PCef - SS - intersect") (7).
Bien que nous n'ayons pas fait une étude systématique de tous les manuels de la période 1, tous les problèmes de construction que nous avons relevés dans les manuels de l'époque sont des problèmes de construction évoquée, sans solide et dont la tâche est la construction d'un objet sous conditions, ("PCev-SS-Obj/cond").
Donc, on peut conclure que les problèmes de construction ont évolué de problèmes de construction évoquée, sans solide et dont la tâche est la construction d'un objet sous conditions, ("PCev-SS-Obj/cond"), pendant la période 1, vers des problèmes de construction effective, avec solide et dont la tâche est la construction d'une intersection ("PCef - AS - intersect"), pendant la période 3.
Notons une corrélation entre l'augmentation des problèmes de représentation et le passage de problèmes de construction évoquée aux problèmes de construction effective. Cela est en conformité avec les orientations des programmes relatives à la pratique du dessin en géométrie dans l'espace.

3. CONCLUSION : RETOUR SUR L'EVOLUTION DES PROBLEMES DE CONSTRUCTION AU COURS DE CE SIECLE

Nous proposons dans ce paragraphe de répondre aux questions soulevées en fin du chapitre précédent :

Question 1

En plus du critère construction effective / évoquée, y a-t-il d'autres critères permettant de caractériser la différence entre les problèmes de construction en géométrie dans l'espace entre les périodes 1 et 3 ?

Question 2

Pourquoi cette évolution du type de problème de construction dans l'espace, entre les deux périodes 1 et 3 ?

Pour la première question, nous avons montré, dans le paragraphe précédent, que les problèmes de construction ont évolué non seulement par rapport au critère "effective / évoquée" mais aussi par rapport aux caractéristiques suivantes : "avec ou sans solide" et "type de tâche". En effet, nous avons montré que les problèmes de construction ont évolué à partir des problèmes de construction évoquée, sans solide et dont la tâche est la construction d'un objet sous conditions, pendant la période 1, aux problèmes de construction effective, avec solide et dont la tâche est la construction d'une intersection, pendant la période 3.

Examinons la question 2. Dans le paragraphe 1 de ce chapitre, nous avons montré deux contraintes, "solide" et "dessin", pouvant expliquer cette évolution des problèmes de construction entre les deux périodes 1 et 3. En effet, sous la contrainte "dessin", la production d'un tracé est devenue l'enjeu du problème de construction de géométrie dans l'espace, comme de la géométrie plane. Seulement, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, le tracé doit être réalisé selon un procédé de tracé à la règle et au compas. De plus, ce dernier exige un algorithme de construction spécifique caractérisant les problèmes de construction effective.

Sous la contrainte "solide", les problèmes de construction portent sur l'objet solide. Donc, sous ces deux contraintes, les problèmes de construction sont du type : problème de construction effective avec solide.

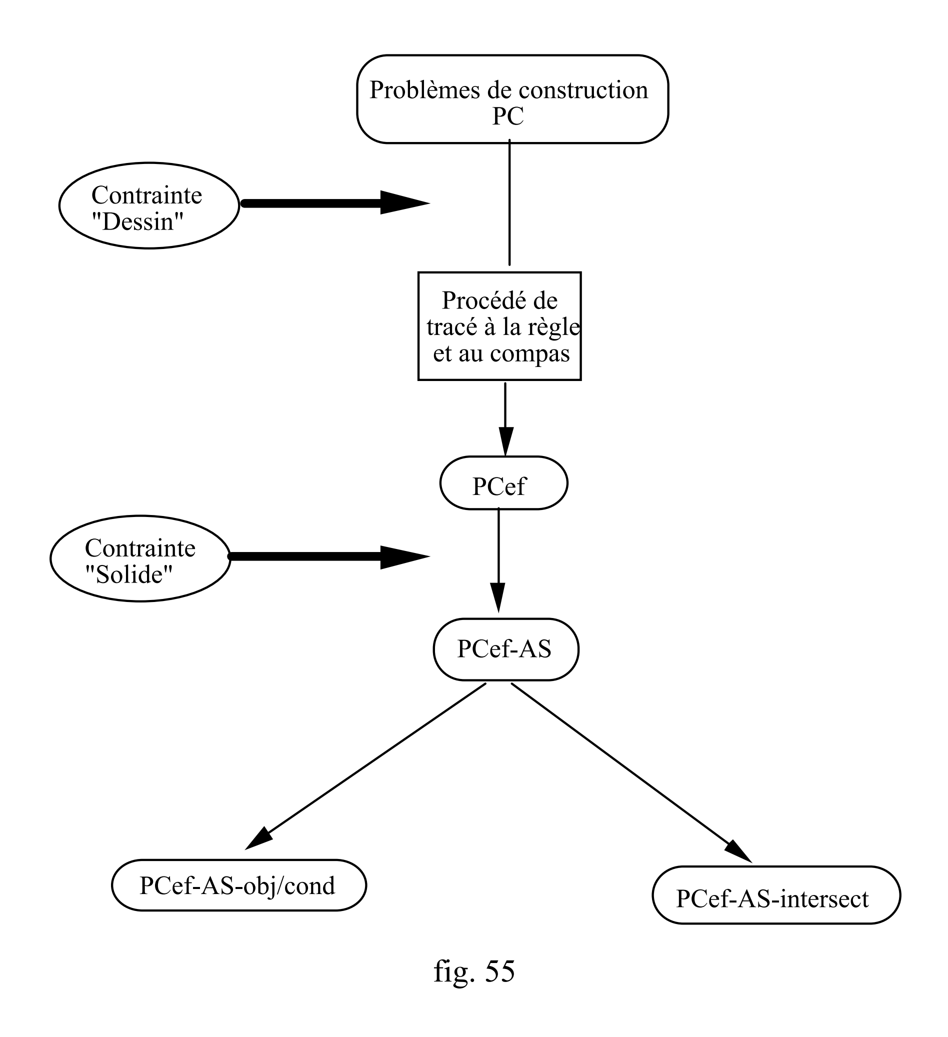


fig. 55

Notons que pour qu'un problème de construction soit un problème de construction effective, il faut la donnée de certains éléments, et de relations entre eux, nécessaires pour que la construction soit effective. Ainsi, la donnée d'un solide correspond à la donnée de plans et de leur intersection, permettant de réaliser des constructions effectives, sous certaines conditions. On peut donc penser que le fait que les problèmes de construction mettent en jeu des solides est un choix du côté de l'économie des problèmes de construction effective. En d'autres termes, nous nous demandons si la contrainte "Solide" n'est pas une conséquence de la contrainte "Dessin". Mais, les problèmes de construction ne sont pas les seuls problèmes portant sur les solides. En effet, le nombre d'exercices qui portent sur les solides a augmenté au cours de cette période et l'analyse des manuels de Seconde et de Première d'éditions récentes (cf. Tableau 34) montre que plus de trois quarts des problèmes de géométrie dans l'espace portent sur des solides.

Manuels (2° et 1°)	Terracher (1995)	Transmath (1995)
Pourcentage[15] des problèmes portant sur les solides	82 % (112/137)	85 % (95/112)

Tableau 34

Il reste à examiner la caractéristique "tâche du problème". Nous reprenons la question que nous avons soulevée dans le paragraphe "Type II: Problèmes de construction" (p.192) : En quoi ces deux types de problèmes diffèrent-ils ?
Pour les deux types de tâche, on peut proposer des problèmes de construction effective. Par exemple, le problème P2, étudié dans le chapitre C1[16], est un problème de construction effective dont la tâche est de construire un objet sous conditions géométriques (PCef-AS--Obj/cond). Or, l'analyse des manuels ci-dessus, révèle que ce type de problème n'est pas proposé par les manuels actuels. Nous pensons que l'explication est au niveau de la démarche de résolution. En effet, les problèmes de construction dont la tâche est de construire un objet sous des conditions géométriques sont plutôt des problèmes d'existence. Leur démarche de résolution se fait par "analyse - synthèse", telle que nous l'avons développée dans le chapitre C1, aussi bien en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace[17]. La partie "analyse" étudie les conditions nécessaires d'existence de l'objet et la partie "synthèse", les conditions suffisantes. Cette démarche est toujours utilisée dans les problèmes de construction en géométrie plane. Rappelons que, dans la partie "analyse" le dessin est présenté comme objet d'étude conduisant à la résolution des problèmes de construction de géométrie plane. La partie "synthèse" donne l'algorithme de construction avec une justification, donc une preuve de constructibilité. Ainsi, l'un des objectifs des problèmes de construction en géométrie plane est de faire fonctionner l'étude de configurations pour la résolution des problèmes.
Dans le cas de la géométrie dans l'espace, le dessin n'est pas objet d'étude dans la partie "analyse". Notons que cela est conforme à ce que nous avons montré dans le chapitre A : a priori la fonction d'expérimentation du dessin "papier-crayon" ne peut pas être

15 Ces données correspondent à l'ensemble des exercices de géométrie dans l'espace des manuels de Seconde et de Première.
16 cf. 3.1, p.166
17 Comme c'était le cas de la période 1.

remplie, au même titre que dans le plan, en tant que modèle du domaine de réalité "géométrie dans l'espace". Cela justifie que l'étude de configurations n'ait jamais été présentée comme outil de résolution des problèmes de construction. Par exemple, les programmes de 1982 proposent la mise en oeuvre des transformations pour la résolution des problèmes de construction dans l'espace[18], alors que pour les problèmes de construction dans le plan, plusieurs outils sont présentés comme étude de configuration, transformation, outil algébrique,...[19]. De plus, la démarche de résolution pour les problèmes de construction ci-dessus, dans le cas du plan et de l'espace, est "analyse - synthèse".[20]Donc, la partie "analyse" ne peut pas s'appuyer sur le dessin, comme modèle d'expérimentation, dans le cas des problèmes de construction dans l'espace dont la démarche de résolution est "analyse - synthèse". Il en résulte que ces problèmes de construction ne remplissent pas les mêmes objectifs par rapport à l'outil configuration, dans le cas de la géométrie plane ou de l'espace.

L'évolution de la tâche du problème est liée à celle de la démarche de résolution de problème en géométrie. Cette dernière est elle même subordonnée à la place qu'on accorde au dessin dans la résolution de problème. Dans le paragraphe 1, de ce chapitre, nous avons montré que pendant la période 1982-94, les directives des programmes relatives à la place du dessin, en géométrie plane et en géométrie dans l'espace se sont orientées vers la mention "*la pratique des figures est centrale en géométrie plane comme en géométrie dans l'espace*".
Nous considérons cette mention comme une contrainte sur la vie des objets de géométrie et en particulier, la résolution des problèmes de géométrie. Seulement, cela ne se traduit pas de la même façon en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace car, comme nous l'avons développé dans le chapitre A, dans chacune de ces "deux géométries" le dessin ne peut pas remplir les mêmes fonctions.
En particulier, en géométrie dans l'espace la fonction d'expérimentation du dessin ne peut pas être remplie au même titre que dans le plan (conclusion 3, chapitre A).

18 cf. 1.5, p. 187
19 cf. 1.4, p. 186
20 Cette constatation résulte de l'examen de manuels d'éditions 1982.

CHAPITRE C3

RAPPORT DES ENSEIGNANTS A L'OBJET "PROBLEME DE CONSTRUCTION DANS L'ESPACE"

Ce chapitre a pour objet la mise à l'épreuve de l'hypothèse de recherche "Papier-crayon", soulevée dans le chapitre C1, selon laquelle les deux types de problèmes "construction effective" et "construction évoquée" ne peuvent pas coexister, étant donné que chacun d'eux nécessite un contrat différent par rapport aux productions d'élèves. Ce travail nous permettra de déterminer de plus les fonctions du dessin dans l'énoncé et dans les productions d'élèves relatives aux problèmes de construction effective.

C'est du côté du contrat qu'il faut chercher la validation de cette hypothèse, en termes d'attentes des enseignants par rapport aux productions d'élèves relatives aux problèmes de construction effective et construction évoquée.
Nous cherchons à répondre aux questions suivantes :

Question a :
Quels sont les types de problèmes de construction que l'enseignant rejette ou accepte ? En particulier : un problème de construction évoquée peut-il vivre dans l'institution "classe" ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

Question b :
Quelles sont les attentes de l'enseignant par rapport aux productions d'élèves pour les problèmes de construction ?

Question c :
Quel est, pour l'enseignant, le statut du dessin qui accompagne un énoncé ?

Nous proposons un dispositif expérimental qui nous permet d'accéder à des attentes d'enseignants. Or, quel que soit ce dispositif, les enseignants ne peuvent pas expliciter toutes leurs attentes. On peut envisager plusieurs possibilités parmi lesquelles l'observation d'un enseignant dans une classe, le questionnaire, l'interview.
L'observation de classes est un moyen d'accéder à des pratiques de l'enseignant dans *l'institution classe*, relatives à un objet de savoir. Par rapport aux problèmes de

construction, ces observations nous permettront en particulier de voir sous quelle forme ces objets, ici problèmes de construction effective, vivent dans la classe et comment l'enseignant négocie le contrat didactique avec les élèves à propos des PCef. Cependant, ce moyen ne nous permet pas de répondre complètement à la deuxième partie de la première question, étant donné que les problèmes PCev ont disparu de la pratique.
Pour cela, nous avons pensé à faire réagir les enseignants à des exercices et à des productions d'élèves choisis en fonction de nos variables, sous forme d'un questionnaire et d'interview.

1. DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Nous proposons un dispositif expérimental comportant deux phases :

Phase 1

Nous avons travaillé avec deux professeurs, que nous avons observés lors de l'enseignement de la géométrie dans l'espace dans les classes de Seconde.
Ensuite, nous avons organisé un questionnaire - interview avec ces deux enseignants après l'enseignement de la géométrie dans l'espace.
La partie I du questionnaire porte sur des exercices qu'on leur a demandé d'analyser. Cette partie leur a été remise une semaine avant, afin qu'ils puissent disposer du temps nécessaire pour l'analyse. L'objet de cette partie du questionnaire est de répondre à la question (a). En effet, nous avons proposé aux enseignants des problèmes de construction parmi lesquels des problèmes qui ne vivent plus dans l'enseignement actuel.
La deuxième partie du questionnaire concerne l'analyse de productions d'élèves que nous proposons aux enseignants. Cette analyse nous permettra de répondre aux questions (b) et (c).

Lors de cette expérimentation, nous avons choisi des enseignants n'ayant jamais utilisé un environnement informatique et ayant enseigné dans une classe de seconde.
Ce choix nous garantit que l'analyse des exercices et des productions sera faite par les enseignants selon leur rapport à l'objet "problème de construction dans l'espace dans l'environnement papier-crayon", qui doit être en conformité avec le rapport institutionnel de l'enseignant à cet objet.

Phase 2

Il s'agit de reconduire le questionnaire de la phase 1, modifié, afin de valider les résultats obtenus de l'analyse de la phase 1.

Nous avons choisi des enseignants :

- n'ayant jamais utilisé un environnement informatique,
- ayant enseigné dans une classe de seconde,
- n'ayant jamais enseigné au lycée pendant la réforme des mathématiques modernes. Ce critère a été retenu suite aux résultats de la phase 1.

L'articulation entre les différentes parties du dispositif peut être schématisée comme ci-dessous :

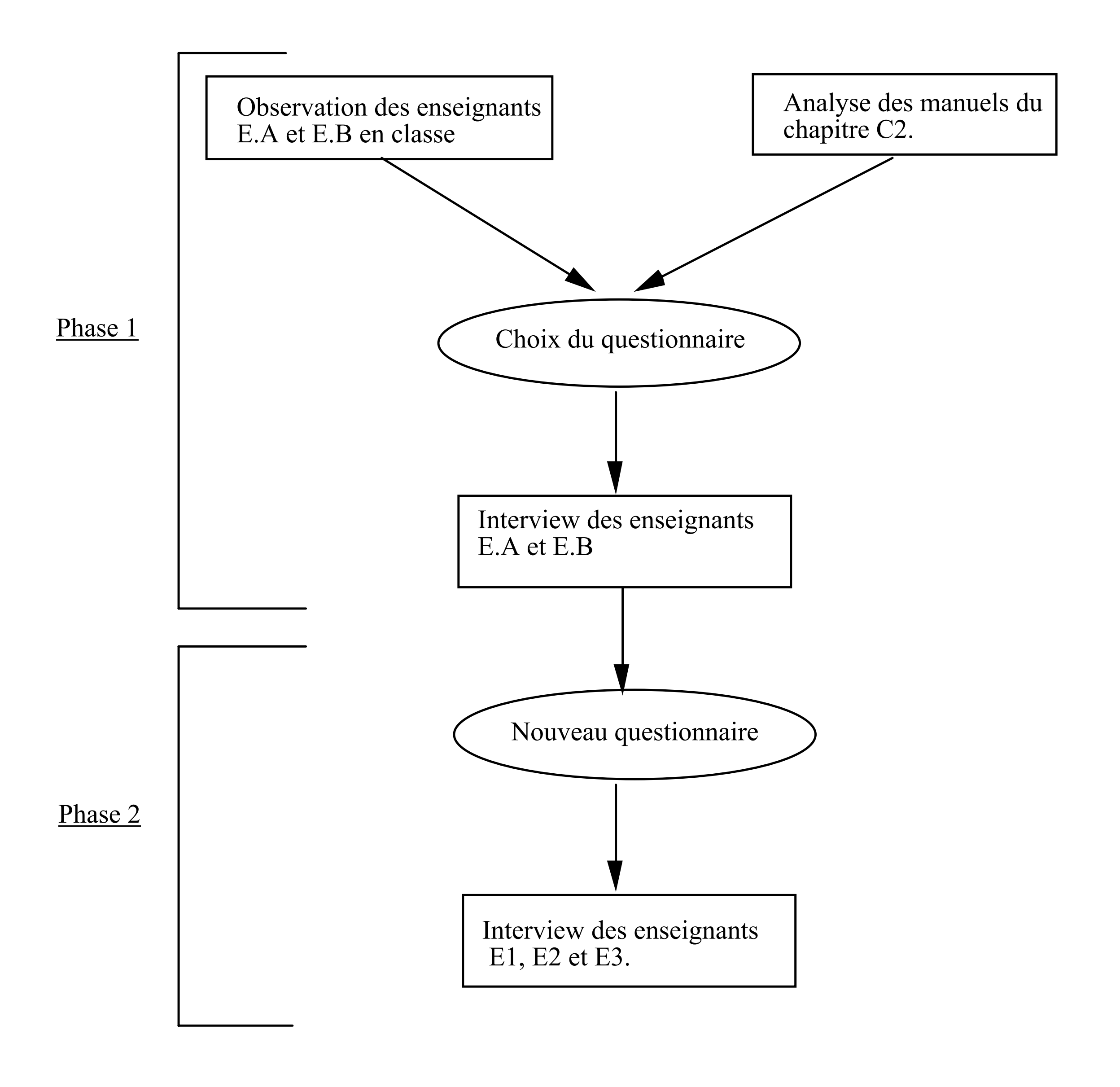


fig. 56

2. MISE EN PLACE ET ANALYSE DE LA PHASE 1

Nous avons travaillé avec deux enseignants, désignés E.A et E.B, dans deux lycées différents et ayant une classe de Seconde pendant l'année de l'observation. Nous les avons observé pendant tout l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Pour notre étude, nous nous sommes intéressé essentiellement aux exercices traités en classe. En effet, comme les problèmes de construction ne sont pas des objets d'étude en soi, mais des problèmes permettant la mise en oeuvre des propriétés d'incidence dans l'espace, ils sont traités essentiellement dans la partie exercices. Nous présentons dans le paragraphe ci-dessous le bilan de ces observations.

2.1. Bilan des observations de classes

Dans les exercices proposés par les deux enseignants, nous retrouvons les types d'exercices que nous avons dégagés de l'analyse des manuels (cf. Chapitre C2, 2.1.1 p.192) : "représentations et tracés", "problèmes de construction" et "problèmes d'incidence sans construction". Nous nous limitons aux deux premiers types de problèmes.

L'objectif des problèmes de représentation proposés est la vérification de la cohérence du dessin par l'utilisation des propriétés géométriques, les règles et les conventions de représentation de la perspective cavalière.

La résolution des exercices pour les problèmes de construction a amené les enseignants à des "mises en garde" sur la lecture du dessin :

- le dessin est insuffisant pour conclure. Il faut justifier (comme dans le plan),
- deux droites dont les représentations sur le dessin sont parallèles, ne sont pas forcément parallèles dans l'espace,
- le plan ne se limite pas à sa représentation.

La résolution des exercices a permis aux enseignants une négociation du contrat didactique, en termes d'exigences et de rejet, quant à la résolution des problèmes de construction effective :

- La construction de l'intersection de deux plans se ramène à la construction de deux points de cette intersection selon le schéma "intersection de deux plans" (Chapitre C2, i), p.163),
- La construction de l'intersection d'une droite avec un plan se ramène à la construction de l'intersection de deux droites selon les schémas (a) ou (b) (Chapitre C2, ii), p.164),

- Un point est un objet que l'on construit comme intersection de deux droites.

La négociation de ces éléments a été faite, sous forme de rejet de propositions d'élèves. Le troisième élément du contrat, a été négocié par un critère de "précision" pour l'obtention du point d'intersection :

1 P : "Dites comment est-ce qu'on peut l'obtenir d'une façon certaine".

10 P: "C'est pas précis, comment on voit un point ?"

Soulignons que D. Grenier (1988, p.336) a observé l'utilisation par un enseignant du critère de "précision" pour rejeter une construction qui n'est pas faite selon ses attentes, sans qu'il explicite ce qu'est une "construction précise" :

> “L'enseignant a utilisé le mot "précis" pour réfuter des productions d'élèves qu'il ne voulait pas. Or ce mot a un sens pour lui qui n'est pas celui donné par les élèves”

Pour les deux premiers éléments, le critère utilisé est le choix du "bon plan" et de la "bonne droite". C'est-à-dire un choix permettant de répondre aux contraintes des schémas d'intersection de deux plans ou d'une droite et d'un plan.

21 P: "Il faut trouver une bonne droite"

35 P: "Il faut choisir le bon plan"

Donc, grâce aux exigences du tracé, les enseignants mettent en place les règles que doit vérifier une construction effective.

Quant aux critères que doivent remplir les productions d'élèves, pour les problèmes de construction dans l'espace, ces enseignants exigent :

- Tracé dans la production.
- Algorithme de construction.
- Justification.

Nous retrouvons ces critères dans les corrigés proposés par l'enseignant.

Cette observation nous a permis d'avoir des éléments de réponses à la question b, en mettant en évidence les attentes de ces enseignants, du moins ce qu'ils en ont rendu public, par rapport aux productions d'élèves pour les problèmes de constructions effectives dans l'espace. Comme nous l'avons dit dans la méthodologie de ce chapitre, on ne peut accéder à toutes les attentes de l'enseignant. Nous reprendrons donc cette question dans le questionnaire en tenant compte des éléments ci-dessus.

2.2. Questionnaire

2.3. Choix et analyse a priori

2.3.1. Principe et mise en place

Nous avons choisi, lors de cette phase, d'interviewer ces enseignants. Nous distinguons deux étapes. Dans la première, nous avons présenté aux enseignants des exercices qu'on leur a demandé de commenter[1]. Ces exercices leur étaient envoyés une semaine avant le rendez-vous.
La consigne était :

> Comme nous en avions convenu, je vous envoie ce document comportant sept exercices suivis de quatre questions. Ces questions sont identiques pour tous les exercices. Je vous demande de répondre, si c'est possible, à ces questions.

Dans la deuxième étape, les enseignants ont commenté les exercices-productions rédigés par nous même.
En plus des notes écrites, l'ensemble de l'interview a été enregistré. Nous avons précisé aux enseignants que le temps n'était pas limité.

Lors de l'interview, d'autres questions ont pu leur être posées à propos de leurs pratiques. Ces questions dépendaient du déroulement de l'interview.
Pour le détail du déroulement, on renvoie à la description de la séance relative à chaque enseignant.
La première étape nous permettra d'apporter des éléments de réponse à la question 1, et la deuxième étape pour les questions 2 et 3.

2.3.2. Choix et Analyse des exercices

L'analyse des manuels a mis en évidence des caractéristiques d'énoncés des problèmes de construction dans l'espace qui ont varié suivant les époques. Nous utiliserons ces caractéristiques comme des variables pour le choix des exercices.

a) Choix des exercices

Le choix des exercices était fait selon quatre variables V1, V2, V3 et V4 :

---

[1] Partie I du questionnaire - Phase 1. Cf. Annexe B3. c

V1 - Type de problème: problème de construction effective (PCef) ou problème de construction évoquée (PCev).
Hypothèse V1 : *Un problème de construction évoquée doit être rejeté.*

V2 - "Objets intermédiaires" : cette variable peut concerner les problèmes de construction effective et évoquée. Dans le cas des problèmes de construction effective, elle est liée à la complexité de la résolution du problème par rapport au tracé. Cette dimension est absente dans les problèmes de construction évoquée. Nous considérons donc cette variable uniquement par rapport aux problèmes de construction effective.
Nous distinguons les cas suivants :
- Sans objets intermédiaires "SOI" : la solution du problème ne fait intervenir aucun nouvel objet. Donc, au niveau du dessin, aucun tracé n'est nécessaire pour les problèmes de construction, si ce n'est de rendre visible une droite en joignant deux points existants.
- Avec objets intermédiaires "AOI" : la solution nécessite l'introduction de nouveaux objets, plans, droites et a fortiori des points, pour les problèmes de construction effective.

V3 - Formulation : Cette variable est relative à l'usage des mots "tracer" et "construire". Nous pensons qu'elle est liée à la précédente et plus précisément :
Hypothèse V3a : *dans le cas des problèmes de construction effective "SOI" on utilisera plutôt "tracer" et dans le cas "AOI" on utilisera "construire".*
Par des questions posées aux enseignants lors de l'interview, nous essaierons de savoir si les deux vocabulaires ne correspondent pas à des attentes différentes. Nous examinerons l'hypothèse suivante :
Hypothèse V3b : *la différence entre "construire" et "tracer" intervient au niveau de la justification. Et plus précisément, la justification est plus exigée dans le cas de "construire" que dans le cas de "tracer".*

V4 - solide : Le problème porte ou non sur les solides de l'espace tels que pyramide, tétraèdre... On notera ES le cas où l'énoncé fait référence à un ou plusieurs solides.
L'analyse des manuels a montré que ce critère est lié au type de problème (V1). Plus particulièrement, presque tous les problèmes de construction effective concernaient des solides usuels, PCef-AS, et les problèmes de construction évoquée sont sans solides, PCev-SS. Nous avons adopté ce choix pour les exercices.

Les différentes valeurs prises par ces variables sont résumées, pour le choix des exercices dans le tableau ci-dessous.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
Type problème	PC_{ef}	PC_{ev}	PC_{ef}	PC_{ev}	PCef
Solide	Oui	Non	Oui	Non	Oui
Objets intermed.	SOI	-------------	AOI	-------------	AOI
Formulation	Construire	-------------	Tracer	-------------	Construire

Tableau 35: Caractéristiques des exercices

Conformément à notre hypothèse V1, les exercices 2 et 4 devraient être rejetés par les enseignants interviewés. Par rapport à l'hypothèse V3a, les formulations des exercices 1 et 3 doivent être contestées.

b) Enoncés choisis

Nous présentons les énoncés d'exercices avec quelques commentaires. Pour des éléments de solutions de leurs corrigés nous renvoyons à l'annexe C3.d.

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme d'un plan P et S est un point extérieur à P. Considérons la pyramide de sommet S et de base ABCD.
Soit I le milieu de [SA], J le milieu de [SB] et K le milieu de [SC].
1) Construire l'intersection du plan (CIJ) avec les plans P et (SDA)
2) Démontrer que le plan (IJK) coupe [SD] en son milieu.

Cet exercice a été choisi dans le manuel Transmath de seconde[2]. L'énoncé du manuel est :

> ABCD est un parallélogramme d'un plan P et S est un point extérieur à P. Considérons la pyramide du sommet S et de base ABCD.
> Soit I le milieu de [SA], J le milieu de [SB] et K le milieu de [SC].
> 1) Quelle est l'intersection du plan (CIJ) avec les plans P et (SDA) ?
> 2) Démontrer que le plan (IJK) coupe [SD] en son milieu.

Nous avons modifié la formulation de la première question en changeant "quelle est l'intersection ..." en "construire l'intersection ..."

2 Transmath 2°, 1990, p.337

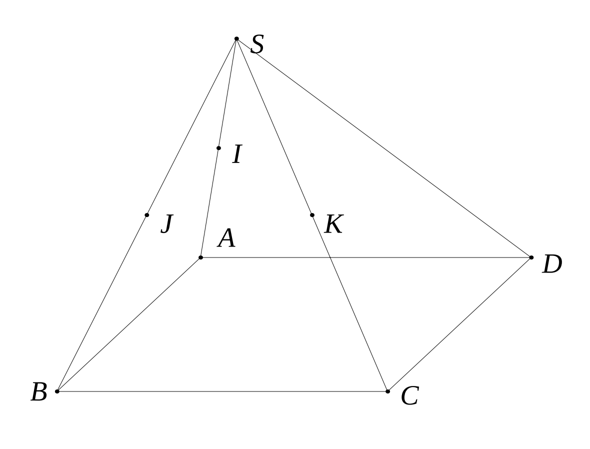


fig. 57

Cet exercice a pour objectif l'application directe des propriétés d'incidence et en particulier, celle du parallélisme des droites dans l'espace.
Les intersections à déterminer sont les droites (DI) et (DC), qui sont déjà tracées. Au niveau du dessin il n'y a aucun tracé à faire, sauf à joindre les points D et I. La solution du problème ne fait intervenir aucun nouvel objet. Ceci peut justifier la formulation du manuel pour la première question : "Quelle est l'intersection du plan (CIJ) avec...?". Nous voulons ainsi connaître l'éventuelle réaction des enseignants face à la formulation que nous avons proposée.
A priori cette formulation doit être rejetée, si l'enseignant ne considère pas que c'est un problème de construction dans la mesure où il n'y a pas de tracés intermédiaires ...
Dans le cas où la formulation proposée n'est pas rejetée, on demandera à l'enseignant, lors de l'entretien, la différence entre l'exercice 1 et l'exercice 3.

<u>Exercice 2</u>

Soit D et D' deux droites non coplanaires, et A un point n'appartenant pas à ces deux droites. Construire une droite Δ passant par A et sécante avec D et D'.

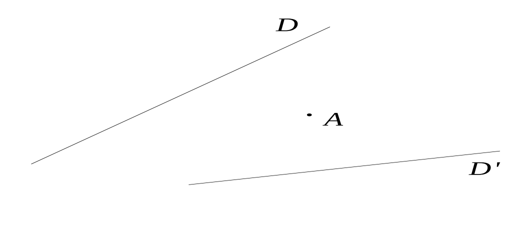


fig. 58

L'énoncé original est :

"Par un point donné, mener une droite qui rencontre deux droites données, non situées dans un même plan "
(Leçons de géométrie élémentaire - J. Hadamard- 1921, p.8).

D'après l'hypothèse V1 cet exercice de construction évoquée doit être rejeté. Dans le cas contraire, on demandera le type de solution attendue.

Exercice 3

La figure suivante représente une pyramide dont la base ABCD est un quadrilatère, K est un point de l'arête [OA], L est un point de l'arête [OD] et M un point de l'arête [OC]. Tracer l'intersection du plan (KLM) avec la pyramide.

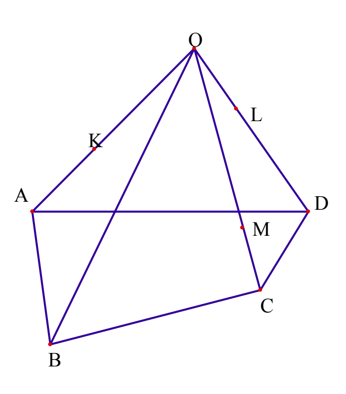


fig. 59

Si l'enseignant ne propose pas de modification pour l'exercice 1, en particulier s'il ne rejette pas la formulation : "construire...", on lui demande la différence entre les exercices 1 et 3.
Dans tous les cas, nous relancerons sous forme des questions directes, la différence entre les formulations : construire / tracer / quelle est ...
Ceci nous permettra de mettre à l'épreuve l'hypothèse V3a.

Exercice 4

Soit P un plan, d une droite sécante à P et A un point n'appartenant ni à d ni à P. Construire une droite passant par A, sécante à d et parallèle à P. Le problème admet-il une solution ?

Cet exercice est extrait de "Mathématiques avec Images logicielles, Seconde, CREEM, 1991, exercice 33 p. 250".

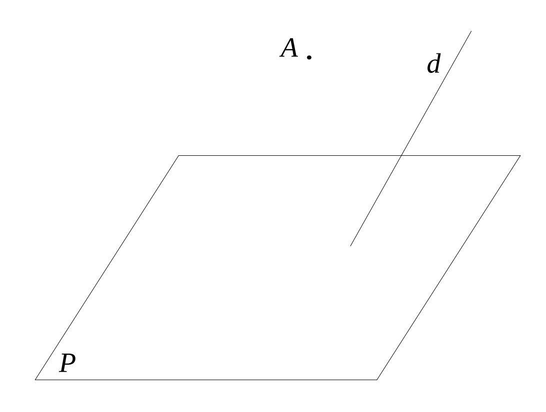


fig. 60

D'après l'hypothèse V1 cet exercice de construction évoquée doit être rejeté. Dans le cas contraire, on demandera le type de solution attendue.

Exercice 5

Soit ABCD un tétraèdre. I est un point de la face (ADC), J est un point de la face (ABC).
Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD)

Extrait de "Dimathème 2°, 1987, exercice 20 p.26"

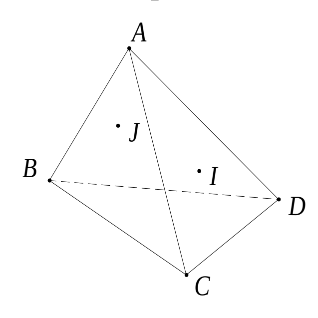


fig. 61

Nous pensons que cet exercice sera considéré par les enseignants comme exercice conforme à leurs pratiques.

2.3.3. Choix des productions d'élèves et analyse a priori

Nous avons **conçu et rédigé** trois productions[9] que nous avons présentées aux enseignants, comme des productions d'élèves : une production EP.a relative à l'exercice 3 et deux productions, EP.b et EP.c, relatives à l'exercice 5. Nous avons choisi ces deux

9 Cf. annexe "Productions d'élèves"

exercices de sorte que les exercices-productions ne soient pas rejetés en raison de l'exercice. En effet, les deux exercices sont des problèmes de construction effective qui concernent des solides usuels, une pyramide et un tétraèdre, et dont la tâche est la construction d'une intersection de deux objets de l'espace. D'après l'analyse des manuels (cf. chapitre C2), ces exercices sont conformes aux pratiques actuelles et donc ils ne devraient pas être rejetés par les enseignants.
Nous nous sommes appuyés en partie sur les résultats des observations de classes pour concevoir ces réponses. Nous cherchons à déterminer les exigences de ces enseignants par rapport aux productions d'élèves à des exercices du type PC_{ef}. En particulier, on cherche à étudier ou à valider les hypothèses suivantes :

Hypothèse "Discussion" : si le dessin accompagne l'énoncé, il n'est pas nécessaire de discuter les différents cas.
Hypothèse "Justification" : le procédé de construction doit être justifié.
Hypothèse "Dessin" : l'élève doit fournir un dessin dans sa production.
Hypothèse "Construction" : Une construction évoquée est rejetée.

Nous avons ainsi retenu les variables suivantes pour le choix des productions :
- "Tracé": la production est accompagnée ou non d'un dessin illustrant l'énoncé, et avec éventuellement des tracés auxiliaires"
- "Discuter les différents cas" : cette variable est liée à une variable relative à l'énoncé, à savoir si l'énoncé est accompagné d'un dessin ou non.
- "Type de construction" : Construction effective ou construction évoquée.
Les caractéristiques de chaque exercice sont rappelées dans ce tableau :

	Elève	EP.a	EP.b	EP.c
	Exercice	Exercice 3 avec dessin	Exercice 5 sans dessin	Exercice 5 sans dessin
P R	Tracé	Oui	Oui	Non
O D	Discuter les différents cas	Non	Non	Non
U C	construction effective	Oui	Oui	
T I	Construction évoquée			Oui
O N	Justification	Non	Non	Non

Tableau 36 : Caractéristiques des exercices-productions

Nous avons fait le choix qu'aucune solution ne soit justifiée. Car c'est un moyen de révéler les exigences de l'enseignant par rapport à la justification. Dans le cas où l'enseignant l'exige, on lui demandera le type de justification qu'il attend.
Par rapport à la variable "Discussion", nous nous sommes placés dans le cas où l'élève ne discute pas les différents cas et nous avons fait varier la variable "exercice avec ou sans dessin". Ainsi, dans la production EP.a, l'élève n'a pas discuté les différents cas, mais comme l'énoncé est accompagné d'un dessin, et d'après l'hypothèse "discussion", les enseignants ne doivent pas exiger la discussion. En revanche, les productions EP.b et EP.c doivent être contestées du fait que l'élève n'a pas discuté les différents cas, étant donné que le dessin n'accompagne pas l'énoncé.
Par rapport à l'hypothèse "construction", la production EP.c doit être rejetée.
Nous pensons que la production EP.a est conforme aux attentes des enseignants.

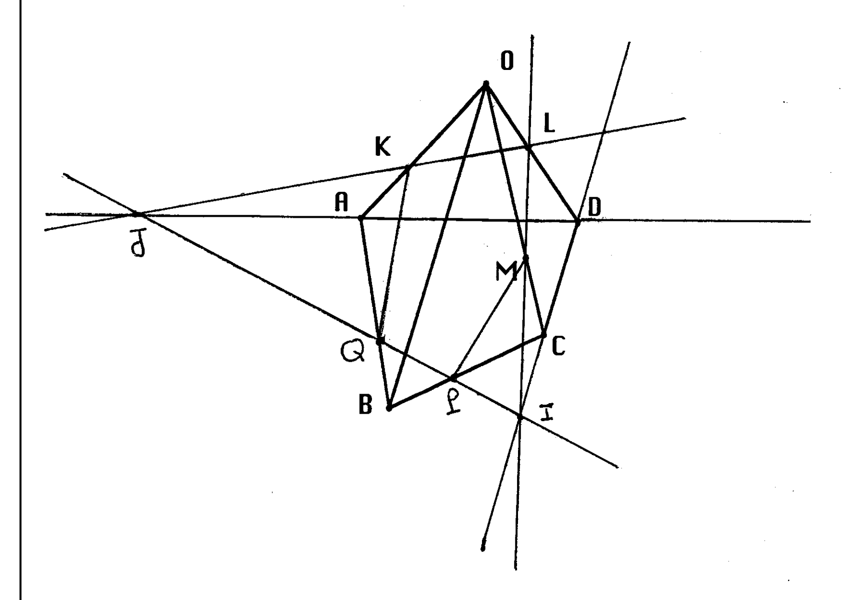
Production EP.a

L'élève propose une solution ne considérant que le cas correspondant aux positions des points K, L et M, sur la représentation qui accompagne l'énoncé.
La rédaction consiste à donner les différentes étapes de la construction sans expliciter les justifications, en particulier sans rappeler les propriétés d'incidence qui permettent l'enchaînement entre les différents pas. Par exemple, avant de conclure que l'intersection des plans (KLM) et (ABCD) est la droite (IJ), il faut dire pourquoi les deux points I et J sont dans ces deux plans.

E1

Exercice 2

La figure suivante représente une pyramide dont la base ABCD est un quadrilatère, K est un point de l'arête [OA], L est un point de l'arête [OD] et M un point de l'arête [OC]. Construire l'intersection du plan (KLM) avec la pyramide.



- Intersection de (KLM) avec la face (ABCD)

Dans le plan (OCD), considérons l'intersection des droites (LM) et (CD) : I.
Dans le plan (OAD), considérons l'intersection des droites (LK) et (AD) : J.
L'intersection des deux plans est la droite (IJ). Il suffit de prendre l'intersection de cette droite vers la face (ABCD), soit le segment [PQ]

- Intersection de (KLM) avec la face (OBC) : le segment [PM]

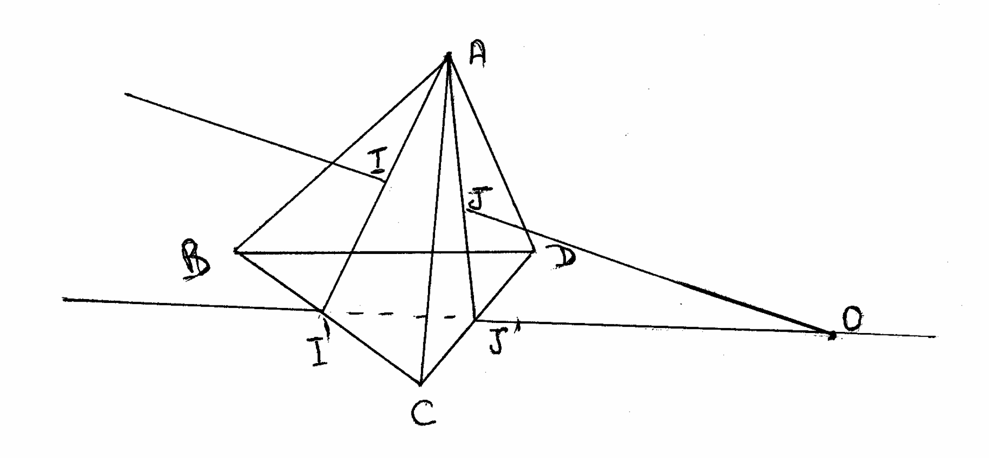
- Intersection de (KLM) avec la face (OAB) : le segment [KQ]

Production EP.b[3]

Exercice 7

Soit ABCD un tétraèdre. I est un point de la face (ABC), J est un point de la face (ADC).

Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).



O est le point d'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD)

Je trace la droite (AI) : elle coupe (BC) en I'.
Je trace la droite (AJ), elle coupe (CD) en J'.
Soit O le point d'intersection de (IJ) et (I'J').

Cette production est identique du point de vue du choix des variables à EP.a, seulement c'est l'élève qui construit le dessin puisqu'il n'était pas fourni dans l'énoncé.

---

3 Dans la production d'élève, nous avons interverti les point I et J par rapport à l'énoncé. Cela n'a pas été remarqué par les enseignants.

<u>Production EP.c</u>

Exercice 7
Soit ABCD un tétraèdre. I est un point de la face (ADC), J est un point de la face (ABC).
Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).

Je prend un plan contenant (IJ) ; Ce plan coupe (BCD) selon une droite Δ.
Je prends l'intersection de Δ avec (IJ).

L'élève ne fait pas de dessin, mais il propose une construction évoquée.

2.4. Analyse

2.4.1. Commentaires des deux enseignants relatifs aux exercices de constructions

Ce paragraphe concerne les exercices 1, 2, 3, 4 et 5. Nous rappelons ci-dessous les différentes valeurs des variables retenues pour le choix des exercices. Ceci nous permettra de connaître les positions de ces enseignants par rapport aux problèmes du type PC_{ef} et PC_{ev}.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5
Type problème	PC_{ef}	PC_{ev}	PC_{ef}	PC_{ev}	PCef
Solide	Oui	Non	Oui	Non	Oui
Objets intermed.	SOI	-------------	AOI	-------------	AOI
Formulation	Construire	-------------	Tracer	-------------	Construire

Tableau 37 : Caractéristiques des exercices

Dans le tableau ci-dessous, nous précisons pour chacun des exercices s'il était accepté ou non par les enseignants. Ces résultats nous montrent une convergence relative aux exercices 1, 3 et 5, c'est-à-dire les problèmes de construction effective. Ceci fera l'objet

du paragraphe a). En revanche, pour les exercices 2 et 4, c'est-à-dire les problèmes de construction évoquée, les deux enseignants n'avaient pas la même position. Nous développerons ce point dans le paragraphe (b)).

	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5
E.A	OUI (1°S)	NON	OUI (1°S)	NON	OUI
E.B	OUI (1°S)	OUI	OUI (1°S)	OUI	OUI

Tableau 38: Réponses des enseignants[4]

a) Cas des exercices du type PC_{ef}:

Comme nous l'avons souligné ci-dessus les exercices du type PC_{ef} ont été acceptés. Nous analyserons d'une part les exercices 1 et 3, où l'on examinera en particulier les hypothèses (V3a et V3b) relatives à la formulation, et d'autre part l'exercice 7.

i) Exercices 1 et 3

D'après les enseignants, ces exercices peuvent être proposés à des élèves de Première, mais ils doivent l'être avec des modifications pour les élèves de Seconde:

5. E.B : "Ah oui, ils sont identiques le 1 et le 3, ça fait appel au même genre de raisonnement. En première S ça passe sans difficulté mais en seconde il faut qu'il soit guidé"

La formulation de l'exercice 1, n'a pas été contestée. Cela nous a conduit à leur demander, de façon explicite, la différence entre les formulations : "construire", "tracer" et "quelle est ...".

Pour les deux enseignants, ils distinguent d'une part "construire" et d'autre part "tracer" et "quelle est ..." par rapport à la variable justification :

54. O : "Dans la formulation des exercices, au niveau des manuels. On peut relever des questions du type “Quelle est l'intersection ... ” ou “construire l'intersection ... ” ou “tracer l'intersection ... ”. Est-ce que vous voyez une différence entre ces formulations"
55. E.B : "Je pense que derrière construire on attend une justification, comment est-ce qu'on peut faire réellement, tandis quand on dit “quelle est”, je pense que c'est moins fort que “construire”. Avec “construire”, j'attends la démarche pour que tout le monde puisse refaire la

4 Nous désignons par "oui" le cas où l'exercice était accepté par l'enseignant et par "non" le cas contraire.

même chose. Par exemple la production E2 convient pour la formulation “tracer” alors pour “construire” on attend en plus une argumentation."

De même pour l'enseignant E.A, "tracer" est du côté du dessin alors que pour "construire" il faut argumenter :

1.66 E.A: "Quand vous dites construire, c'est vraiment, toujours, c'est argumenter pourquoi c'est construit comme ça et pourquoi ça existe ?"

Ceci confirme notre hypothèse V3b. En revanche, on ne peut rien conclure sur l'hypothèse V3a.

ii) Exercice 5

C'est un exercice qui a été qualifié de relativement difficile pour les élèves de seconde, mais qui est classique pour ce niveau.

b) Cas des exercices du type PC_{ev}

Comme les deux enseignants n'avaient pas la même position par rapport à ces deux exercices, leur réponses seront analysées par rapport à chacun d'eux.

i) Enseignant E.A

Les deux exercices ont été désignés comme relevant du type d'exercices qu'on ne traite plus actuellement en raison de la nature du raisonnement qu'il nécessite :

1.4 E.A : "Celui-là, non. Même en Terminale, c'est limite. En fait, non. D'abord, c'est un problème de construction. Il y a un problème de condition nécessaire : la construction étant faite, est-ce que ça marche ? Et ensuite, il y a la condition suffisante : est-ce que ce que nous avons trouvé, ça va ? Et puis là, il y a des cas, par exemple, construire un plan et la droite D' coupe, ça dépend du point A, comment il est placé par rapport à la droite D'. Il y a toute une discussion là."

Ceci nous ramène aux questions suivantes:

- Qu'est-ce pour l'enseignant qu'un “problème de construction” au sens ci-dessus ?
- Les autres exercices sont-ils des problèmes de construction ?

Nous essaierons de répondre à ces questions après l'analyse de la partie concernant les productions d'élèves, dans le paragraphe "Problèmes de construction pour E.A"

ii) Enseignant E.B

Contrairement à l'enseignant E.A et à notre analyse a priori, celui-ci n'a pas rejeté les exercices 2 et 4. Il a proposé une solution pour chacun d'eux. Ces deux solutions utilisent des règles d'usage du type RU(P,D). C'est-à-dire, on se donne le droit de considérer l'intersection d'une droite et d'un plan. Nous analyserons, dans ce qui suit les solutions proposées.

a. Exercice 2

Après avoir exposé une solution de l'exercice, il conclut que c'est un bon exercice de classe de Seconde :

9. E.B : " ... Donc je pense qu'en Seconde il est bien, donc de le voir assez rapidement dès qu'on a vu un petit peu les intersections plan - droite, il me paraît bien."

La solution[5] proposée par l'enseignant pour cet exercice est :

7. E.B : "Moi, j'ai juste vu le problème. C'est que ... moi j'ai fait comme ça je pense que c'est juste: la droite ...... D, la droite D' et le point A, on mène par A une parallèle à D' comme ça D". On envisage le plan (D',D") là, puis la droite D coupe ce plan en un point I, puis on trace (IA) qui va couper D'."

En d'autres termes :

Solution:

On trace la droite D", passant par A et parallèle à D'.

Soit P le plan défini par D' et D".

On considère I le point d'intersection de D avec P.

Enfin, la droite (AI) répond au problème.

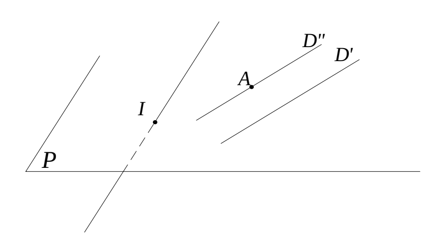


fig. 62

Soulignons quelques points à propos de cette solution, que nous commenterons dans la suite :

1 - Il utilise une règle d'usage du type RU(P,D).

2 - Il ne prend pas en compte les différents cas pour l'étude de l'existence de l'intersection de D avec P.

5 Les solutions possibles pour cet exercice sont détaillées dans "la mise en place de la phase 3".

3 - Il ne prend pas en compte les différents cas pour l'étude de l'existence de l'intersection de (AI) avec D'.
4 - Quel est le rôle de la droite D" ?
Nous n'avons aucun indice pour éclaircir **le deuxième point.**

Le point 3 a été soulevé par l'enseignant, mais la discussion est relative à la position du point I "choisie" par l'élève :

7. E.B: "... Mais il y a un petit problème: si par hasard la droite D coupe ici on va être coincé, alors là est-ce que les élèves vont sentir que ... peut-être dans le lot de ceux qui ont fait ceux qui feront un dessin il y aura une situation comme ça, il dira que ça ne marche pas votre truc. Ceci dit c'est intéressant de voir s'il y en a un qui, si dans la classe ... si D est comme ça je suis coincé là, je peux pas faire passer une droite qui passe par D, qui coupe D et coupe D' et elle passe par A."

Ici l'enseignant fait référence au cas où on "met" le point I sur la droite D" :

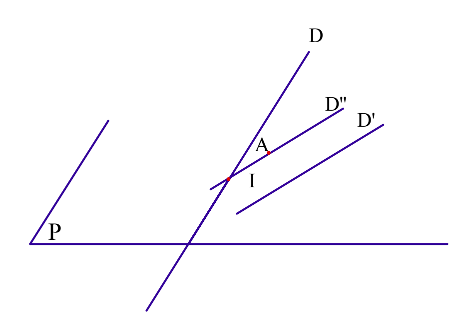


fig. 63

Ceci soulève une question, qui rejoint le premier point : qu'est-ce que l'enseignant entend par "...si par hasard la droite D coupe ici on va être coincé..."[6] ?. Deux interprétations sont possibles :
- le point I est placé de façon arbitraire[7] et certains choix peuvent induire des cas particuliers. Ces cas génèreront ensuite des discussions, du côté géométrique, sur l'étude des différents cas,
- l'étude des différents cas se fait du côté géométrique qu'on traduira au niveau du dessin.
Nous pensons que c'est la première interprétation qui est la plus plausible par rapport aux propos de l'enseignant. En effet, il considère la situation comme intéressante, parce

6 Cf. 7. E.B
7 C'est-à-dire que l'élève est conscient du choix arbitraire du point I.

qu'elle peut générer une discussion entre les élèves, sur l'étude des différents cas, si parmi eux certains plaçaient le point I, dans des positions où la droite (AI) ne coupe pas la droite D'[8]. La discussion ne sera pas au niveau d'un élève, mais comme résultat de réponses différentes. Si cette discussion n'a pas lieu, c'est à lui de poser la question sur l'existence de l'intersection :

9. E.B : " Je la définis comme étant parallèle à D' et passant par A, après j'ai mon plan P qui contient les deux droites D' et D" et le point A, la droite D n'étant pas coplanaire va couper ce plan là en un point I, et après j'envisage la droite (IA). Mais le problème si ce point là est par hasard ici, du coup elle va plus, donc là on est coincé on ne peut pas le faire. Maintenant c'est vrai si dans le lot des élèves il y en a un qui fait juste ce système là ça peut générer une discussion entre eux, ça c'est intéressant. Mais par malchance s'il n'y a aucun qui le fait ça sera au prof de dire "Est-ce que c'est toujours possible",..."

Dans le sens du **premier point**, nous avons posé une question sur la détermination ou plutôt le choix de la position du point I. Puisque, selon la règle d'usage RU(P,D), dès que l'on sait que l'intersection d'une droite D et d'un plan P existe, on peut considérer leur point d'intersection et le placer sur le dessin.

10. Obs. : "Alors dans ce cas là est-ce qu'on va exiger d'eux comment ils trouvent le point I, l'intersection de la droite D avec le plan P ? comment on trouve le point I ?"
11. E.B : " Il est là !"

Il montre sur le dessin le point I, avec un certain contrôle : le point I doit être à l'intérieur du demi parallélogramme.
Nous avons relancé la question en évoquant une autre possibilité pour la position du point I, par un élève.

12. Obs. : " Si un autre élève propose..."
13. E.B: " Ah oui, le point I est arbitraire, pour nous est arbitraire"
14. Obs. : "Dans ce cas-là, une solution utilisant arbitrairement le point I"
15. E.B: " Ah oui c'est sûr il y aura un problème. si l'élève veut dire ben tiens "je coupe là" alors que moi je l'ai mis là-haut. Ah oui, c'est un truc auquel j'ai pas pensé. Il suffit par hasard qu'il positionne l'intersection juste ici, parce que moi je suis tombé pile dans le truc par exception, mais lui peut par hasard... Il faut le laisser, c'est vrai ce point I on le met là où on veut, c'est uniquement une question de ... c'est vrai j'ai pas pensé à ça. L'ennui là direct et puis cet ennui là

8 idem le point I sur la droite D".

de positionner un point I pile au mauvais endroit, je crois qu'il rejoint l'autre de toute façon ... et on ne peut pas leur imposer un dessin, parce que c'est trop guidé, parce qu'on leur fait tout de suite le plan. Non, c'est intéressant de voir si ... Je pense que c'est la bonne méthode"

L'enseignant n'a pas considéré le problème de "la position arbitraire du point I" comme problème en soi. Ce qui l'intéressait c'était comment le dessin peut générer la discussion des différents cas. Nous reviendrons sur ce point dans l'analyse de l'exercice 4.
Enfin pour le **quatrième point**, nous lui avons posé la question sur le rôle de la droite D".

16. Obs. : "Quel est le rôle de la droite D" ?"
17. E.B: "Pour définir le plan P"
18. Obs. : "D'accord"
19. E.B: "Au départ j'ai un dessin qui est comme ça, après je positionne ma droite parallèle à D' ça fait mon plan l'autre droite coupe, je trace..."

Cette réponse peut nous laisser supposer que pour l'enseignant, il n'était pas possible de définir un plan par un point et une droite, et qu'il fallait deux droites coplanaires[9]. En fait, nous ne le pensons pas puisqu'au début de l'entretien nous lui avons demandé comment il définissait avec les élèves de seconde les concepts "droite" et "plan" :

obs. : "Est-ce que vous définissez les concepts droites et plans ?"
E.B : "...Un plan on le définit par une droite et un point n'appartenant pas à la droite, ou par deux droites sécantes ..."

De plus, les observations que nous avons faites dans sa classe, le confirment.
Ainsi, nous n'avons pas d'éléments expliquant le fait d'introduire une droite D" pour considérer le plan P défini par A et D'.

b. Exercice 4

Comme pour l'exercice 2, l'enseignant n'a pas rejeté l'exercice 4, il l'a considéré comme un problème de seconde, et qui a toujours une solution :

25. E.B: "... Celui-là il passe bien en seconde, celui là, les notions sont assez simples, la droite qui est là elle est bien parallèle parce qu'elle est dans le plan parallèle .... Par contre pourquoi la

9 Sécantes ou parallèles. Ici il a considéré une droite parallèle à D'.

question "le problème a-t-il une solution ?” c'est là où j'ai pas compris la question, autant pour l'autre, il y a une ambiguïté enfin on peut avoir des petits problèmes, selon les positions des droites on peut être amené à quelque chose qui est impossible, là je n'ai pas vu de cas impossible ..."

La solution proposée utilise également une règle d'usage du type RU(P,D) :

23. E.B: "J'ai mené le plan qui est parallèle à P passant par A, la droite d qui coupe l'autre va couper celui-ci en un point I, et puis je trace la droite (AI) qui répond au problème"

En d'autres termes, il propose une solution que nous avons détaillée dans l'annexe de la phase 2 et que nous rappelons :

<u>Solution S3R(P, d):</u>

Cette solution utilise une règle d'usage du type RU(P, d).

Soit P' le plan parallèle à P passant par A.
Comme d est sécante avec P, elle est sécante avec P', soit B leur point d'intersection.
La droite cherchée est la droite (AB).

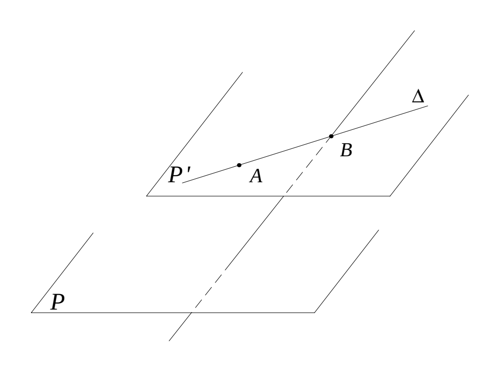


fig. 64

Nous avons soulevé la question du choix de la position du point B :

24. Obs. : "Et le point B comment le trouve-t-on ?"
25. E.B: "Oui, on a toujours un arbitraire. On sait qu'il existe, mais je n'ai pas de moyen de le faire d'une façon précise, je le vois pas, il n'y a pas a priori."

En signalant qu'on ne peut pas le faire "d'une façon plus précise", il sous-entend, selon notre terminologie, qu'on ne peut pas le faire par des constructions effectives. Signalons

que cette formulation a été employée par l'enseignant dans sa classe pour refuser des constructions évoquées, proposées par des élèves[10].

c) Conclusion

L'analyse des exercices 1 et 3 a confirmé l'hypothèse V3b. En revanche, on ne peut rien conclure quant à la validité de l'hypothèse V3a. Dans la suite de notre dispositif nous ne chercherons plus à examiner des hypothèses ci-dessus. Cependant, nous retenons la règle suivante, que nous appellerons **règle - formulation** :

La différence entre "construire" et "tracer" réside au moins au niveau de la justification. Et plus précisément, la justification est plus exigée dans le cas de "construire" que dans le cas de "tracer".

Quant à l'hypothèse V1, nous pouvons rien inférer des entretiens puisque les deux enseignants n'avaient pas la même position. En effet, l'enseignant E.A, les a considéré comme des problèmes de construction qu'on ne traite plus actuellement en raison du type de raisonnement qu'ils nécessitent. L'enseignant E.B a considéré les deux exercices 2 et 4 comme des exercices de classe de seconde. Or nous n'avons relevé aucune trace de ce type de problème, PCev, dans son cours.
Remarquons que les deux solutions proposées par l'enseignant E.B pour les exercices 2 et 4, utilisent la règle d'usage RU(P,D). Alors que pour ces deux exercices, il existe des solutions utilisant la règle d'usage RU(P,P). L'utilisation de la règle RU(P,D) pour les deux exercices est-elle une coïncidence ? A ce propos nous avançons l'hypothèse suivante :

Dans les problèmes de construction évoquée, l'utilisation de la règle d'usage RU(P,D) est plus mobilisée que la règle RU(P,P).

Notre hypothèse se base sur le fait que les conventions de représentation nous donnent plus d'éléments de contrôle dans le cas de l'intersection d'un plan et d'une droite que dans le cas de deux plans. Cette hypothèse reste à vérifier.

Nous reprendrons l'examen de cette hypothèse V1 dans la phase 2.

2.4.2. Commentaires des deux enseignants relatifs à des productions d'élèves

---

10 Cf. Chapitre C3, 2.1, p.208

L'objet de ce paragraphe est l'analyse des entretiens avec les enseignants E.A et E.B à propos des exercices - productions. Dans le tableau ci-dessous nous rappelons les caractéristiques des énoncés et des productions associées :

	Exercice/Prod[11]	EP.a	EP.b	EP.c
Exercice	ED	Oui		
	Type de problème	PC_{ef}	PC_{ef}	PC_{ef}
Production	Tracé	Oui	Oui	Non
	Discussion	Non	Non	Non
	Construction effective	Oui	Oui	
	Construction évoquée			Oui
	Justification	Non	Non	Non

Tableau 39 : Caractéristiques des exercices/productions

Dans l'analyse de l'entretien, on doit se poser la question de l'influence de la production EP.b sur EP.c. En effet, les deux productions sont associées au même énoncé (exercice 5) et la production EP.b utilise une construction effective qui est correcte. Ceci peut favoriser le rejet de la production EP.c par une simple comparaison avec EP.b.
Nous avons résumé sous forme de tableau (Tableau 40: Réponses des enseignants) les réponses des enseignants par rapport aux points suivants.

- Tracé : on attend des remarques sur les conventions de représentation, ou sur le fait qu'il manque le dessin dans la production .
- Discussion : ce qui nous intéresse sont les cas où l'enseignant exige ou non une discussion des cas possibles dans la production. Cela nous permettra de voir s'il y a une corrélation avec la variable "Dessin".
- Construction : on mettra "oui" si la construction est acceptée.
- Justification : l'enseignant peut estimer qu'il manque la justification, qu'on désignera par "manque"
- Autres : d'autres types de remarques.

11 Rappelons les choix des exercices:
EP.1: exercice 3 avec dessin
EP.2 et EP.3: Exercice 5 sans dessin

		EP.a	EP.b	EP.c
E A	Tracé	pb de pointillés	pb de pointillés	
	Discussion		à faire	à faire
	Construction	acceptée	acceptée	rejetée
	Justification	à faire	à faire	à faire
	Autres	manque la stratégie	manque la stratégie	stratégie
E B	Tracé	oui	oui	
	Discussion		à faire	
	Construction	acceptée	acceptée	rejetée
	Justification	à faire	à faire	
	Autres		pas d'idée générale	idée générale

Tableau 40: Réponses des enseignants

Pour chacun des enseignants, nous présenterons et analyserons les caractéristiques des productions attendues.

a) Enseignant E.A

Des commentaires sur les trois productions, il ressort des critères que les productions d'élèves doivent vérifier.
Avant que l'enseignant commente les productions, il a critiqué les dessins par rapport aux conventions de représentation d'un dessin de l'espace en perspective :

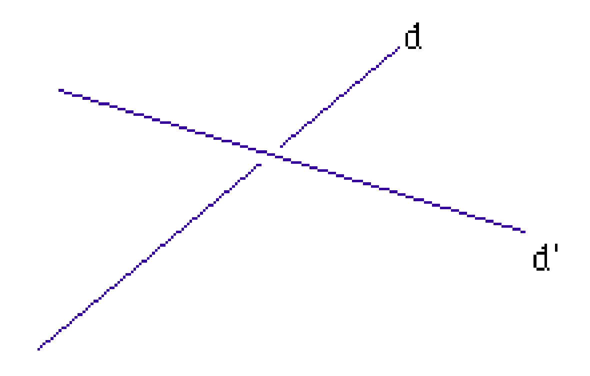
> 1.10 E.A : "D'abord, il y a quelque chose qui me gêne dans votre figure et je fais très attention à ça:
> c'est que c'est illisible dans le sens où par exemple cette droite là[12] ne rencontre pas la droite (BO). Il faut absolument que l'intersection ne soit pas une intersection, moi je mettrais du blanc là." (EP.a)

Ce sont les conventions qu'on utilise pour montrer sur un dessin que :

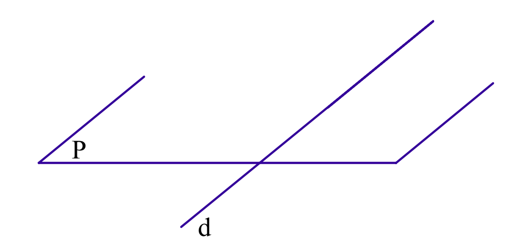
---

12 la droite (KL)

- deux droites sont sécantes ou non.
Par exemple, sur ce dessin, il faut lire que les droites d et d' ne sont pas sécantes puisque sur la représentation une partie de la droite d est en "blanc". Cette partie est le voisinage du point d'intersection s'ils étaient sécantes. De plus, le fait de mettre un "blanc" sur une des droites implique une disposition relative dans l'espace.



- une partie d'un objet est cachée par un autre objet :
On représente les parties cachées par des pointillés. Par exemple, sur ce dessin une partie de la droite d est en pointillés. Il représente la partie de la droite qu'on ne "voit" pas et par conséquent, la droite d est sécante avec le plan P.



i) <u>Type de production attendue</u>

L'entretien a permis de dégager trois critères relatifs aux productions d'élèves pour les problèmes de construction effective du type exercice 3 et 5 :
- Critère C1 : Faire apparaître la stratégie adoptée
La solution du problème doit faire apparaître la stratégie utilisée sous forme contextualisée à l'exercice.
- Critère C2 : Justification
Il faut que la solution soit argumentée. Le degré de justification dépend du contexte de production : devoir à la maison, devoir surveillé ou devoir en classe. Il correspond donc à l'hypothèse "justification"
- Critère C3 : Discuter les différents cas si le dessin n'est pas donné.
Ce critère correspond à l'hypothèse "discussion".

ii) <u>Analyse des critères</u>

a. Critère C1: Faire apparaître la stratégie adoptée

La production EP.1 a été critiquée essentiellement par rapport au fait qu'elle n'annonce pas la stratégie adoptée.

> 1.13 E.A : "La même chose : sa façon de rédiger, c'est pas une façon pédagogique c'est-à-dire il n'y a pas de stratégie. Dans ce type d'exercice, ce qu'on leur demande, c'est d'émettre une stratégie : comment on va faire systématiquement pour trouver l'intersection de deux plans ? Je veux bien, il prend des droites. Et alors ? Pourquoi il prend des droites ? Et pourquoi il prend celles-là ? Je veux dire, pour un élève, pour un élève qui ne verrait pas - pour lui, il voit tant mieux - mais disons pour un élève qui ne verrait pas et qui aurait besoin de raisonner, je pense qu'on a besoin d'abord d'exposer la méthode générale. Il a juste. Il dit pas qu'il va chercher deux points communs aux plans (ABCD) et (KLMQ), il ne l'annonce pas du tout. C'est sa stratégie : elle n'apparaît pas. Mais c'est vrai, c'est un exercice typique 1°S."

Rappelons que la production EP.a, propose un "algorithme de construction".
Ici l'enseignant s'attend à ce que l'élève donne d'abord la méthode générale du type :
- pour construire l'intersection de deux plans P et P' : on cherche l'intersection de deux droites d (du plan P) et d' (du plan P') sécantes. Le point d'intersection de d et d' est un point de l'intersection des deux plans,
- pour construire l'intersection d'une droite d et d'un plan P : on considère un plan auxiliaire P' contenant d et sécant avec P selon une droite Δ; le point d'intersection cherché est l'intersection des deux droites d et Δ.

En fait, il n'attend pas de l'élève qu'il donne la stratégie sous l'une des formes citées mais sous une forme contextualisée au problème :

> 1.13 E.A : "... Il dit pas qu'il va chercher deux points communs aux plans (ABCD) et (KLMQ), il ne l'annonce pas du tout. C'est sa stratégie : elle n'apparaît pas ..."[13]

En d'autre termes, il attend une solution du type suivant[14] :

> Déterminons l'intersection des plans (KLM) et (ABCD). Comme les deux plans ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite. Pour cela, il faut déterminer deux points communs aux deux plans ...etc.

De même, pour la production EP.b, il la caractérise comme "recette de cuisine" pour l'absence de "stratégie" :

13 citation ci-dessus
14 Nous traiterons le cas de la production EP.a.

1.24 E.A : "Alors, c'est la même chose : le dessin, moi... j'ai du mal à accepter ce genre de rédaction : ça fait recette de cuisine, on sait pas du tout pourquoi il fait ça. Alors aussi, la stratégie rien.

Enfin, pour la production EP.c, il remarque que l'élève a donné uniquement la stratégie et que la méthode est esquissée :

1.26 E.A : "... Disons, la méthode est esquissée. “Je prends un plan contenant (IJ)” ... "

Et, bien entendu, il manque l'algorithme de construction.

b. Critère C2 : Justification

Pour la production EP.b, l'enseignant a évoqué deux critères : stratégie et argumentation.

1.24E.A : "Alors, c'est la même chose : le dessin, moi... j'ai du mal à accepter ce genre de rédaction : ça fait recette de cuisine, on sait pas du tout pourquoi il fait ça. Alors aussi, la stratégie rien. On ne sait pas pourquoi O c'est l'intersection... Pourquoi ça marche ? Voilà... c'est-à-dire il n'y a pas d'argumentation, il y a une succession... c'est parce qu'il a fait 10 fois l'exercice qu'il sait le refaire, quoi."

Comme dans la production EP.a, on ne trouve que le programme de construction, qui est vu par l'enseignant comme "recette de cuisine". Il remarque l'absence de l'argumentation parce que l'élève ne dit pas pourquoi ce qu'il obtient répond au problème ("On ne sait pas pourquoi O c'est l'intersection... Pourquoi ça marche ?"; citation ci-dessus).

c. Critère C3 : Discuter les différents cas si le dessin n'est pas donné.

L'enseignant ne fait aucun commentaire pour les productions EP.a et EP.b concernant le statut du dessin. On pense que pour lui les deux énoncés sont accompagnés d'un dessin. En effet, dès qu'il commence à lire la production EP.c, et en se rendant compte qu'il n'y a pas de dessin, il se pose des questions sur les données du problème :

1.26 E.A : "... vous n'imposez pas les points I et J ? Les points I et J ne sont pas imposés par la figure ou ils sont imposés ?"

1.27 Obs. : "Il n'y avait que l'énoncé."

1.28 E.A : "Là, il n'a pas discuté les cas c'est-à-dire l'éventuelle possibilité que le plan qu'il choisit ne

coupe pas (BCD)... C'est pour ça, en Première S, pour éviter ce genre de problème, on donne dans les évaluations les points I et J, on les fixe sur la figure de façon à ce qu'il n'y ait pas d'ambiguïté ..."

...

1.30. E.A : ".... Si on les met sur la figure, si on place I et J, ça veut dire : en tant qu'enseignant, on élimine les cas sauf si on met I et J de façon à ce que ce soit parallèle ou on met dans l'hypothèse parallèle au plan (BCD)."

Il est clair qu'il ressort de ces citations, le critère discussion. Nous le considérons comme une clause du contrat didactique que nous appellerons règle-discussion.

iii) Cas de la production EP.c

La production EP.c, qui utilise une construction évoquée, est rejetée par l'enseignant parce que la solution ne précise ni le plan utilisé, ni comment obtenir la droite d'intersection de deux plans, bien que la solution donne l'existence de l'objet à construire. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe 2.4.3.a). p.236.

b) Enseignant E.B

Comme dans le paragraphe précèdent, nous caractériserons et nous analyserons les productions attendues par l'enseignant.

i) Type de productions attendues

Il utilise les mêmes critères, que ceux utilisés par l'enseignant E.A, mais d'une façon moins explicite. A la fin de l'entretien, à notre demande, il donne des critères sur les productions attendues selon les formulations “tracer” ou “construire”:

55. E.B: "Je pense que derrière construire on attend une justification, comment est-ce qu'on peut faire réellement, tandis quand on dit “quelle est”, je pense que c'est moins fort que “construire”. Avec “construire”, j'attends la démarche pour que tout le monde puisse refaire la même chose. Par exemple la production EP.b convient pour la formulation “tracer” alors pour “construire” on attend en plus une argumentation."

ii) Analyse des critères

a. Critère C1 : Faire apparaître la stratégie adoptée

C'est en commentant la production EP.c, qu'il souligne l'absence d'une stratégie ou d'une "idée générale" dans la production EP.b :

41. E.B: "... La première production elle est bien mais l'idée générale est absente, tandis que là il y a une idée mais on ne peut pas avec ça positionner un point. Celui là il a senti, mais le passage au dessin il n'a pas su faire."

b. Critère C2 : Justification

L'exigence par rapport à ce critère est fonction du contexte dans lequel on propose les exercices: devoir surveillé, devoir à la maison ou un exercice qu'il faut faire en classe. Ainsi, la production EP.b, répond au problème si c'était à faire en classe. En revanche, il faudrait plus de justification si c'était à faire à la maison :

33. E.B: "Si c'est un exercice qui est fait comme ça en classe ça va, si c'est quelque chose qui était rédigée à la maison il faudrait qu'il précise que les points O, L, D, C et M sont coplanaires sur la face (OCD) que les droites (LM) et (DC) ne sont pas parallèles d'après le dessin, donc elles se coupent en un point I. On prolonge, il faut plus de détails, mais si c'est un truc qui est fait comme ça en une demi heure en classe ..."
34. Obs. : "C'est-à-dire au niveau de l'argumentation"
35. E.B: "Voilà c'est ça"

c. Critère C3 : Discuter les différents cas si le dessin n'est pas donné.

Au niveau de la production EP.b, l'enseignant constate que l'étude des différents cas n'a pas été faite, et que lui même l'a oublié :

38. E.B: "C'est toujours la même chose, il faut donner ...Ah, il y a un problème de parallélisme qui intervient là. D'avoir deux points sur la face tels que la droite qui se trouve parallèle au plan (BCD). Je l'avait complètement escamoté aussi, puisque j'ai fait tout de suite le bon dessin. Lui il a fait comme moi. J'ai fait une faute, j'ai escamoté un problème de discussion. "

Ceci confirme le critère "discussion", bien que l'enseignant E.B ne l'ait pas explicité comme c'était le cas de l'enseignant E.A.

2.4.3. Rapport des deux enseignants à l'objet "problèmes de construction dans l'espace"

Dans ce paragraphe nous essaierons de caractériser ce qu'est un problème de construction pour les deux enseignants E.A et E.B. Pour cela, nous analyserons leurs réactions par rapport aux variables "type de problème" et "type de construction utilisé dans la production".
Dans le tableau ci-dessous, nous rappelons des résultats présentés antérieurement que nous utiliserons dans ce paragraphe.

		E.A	E.B
Exercices	PCef	Oui	Oui
	PCev	Non, car la démarche de résolution est "analyse-synthèse"	Oui, il propose des constructions évoquées.
Exercices-production	PCef-Cef	Analyse selon les critères C1, C2 et C3	Analyse selon les critères C1, C2 et C3
	PCef-Cev	Non, car il manque le procédé de tracé.	Non, car il manque le procédé de tracé.

Tableau 41

a) Problèmes de construction pour l'enseignant E.A

i) <u>Cas d'une construction évoquée pour un problème de construction effective</u>

La production EP.c a été rejetée parce que la solution ne précise ni le plan utilisé ni comment obtenir la droite d'intersection de ce plan avec le plan (BCD).

> 1.30...... E.A : "Oui... non quand même : “un plan”, moi je mettrais pas ça, “je prends **le** plan (AIJ), contenant...”. Et puis, c'est pas “selon une droite Δ” mais “selon **la** droite Δ définie par I' et J'”. Il faut des choses plus précises... parce qu'après, ça lui permettrait de rédiger en faisant bien remarquer “que dans ce plan, les deux droites (IJ) et (I'J') sont dans ce plan, donc elles sont sécantes” ..."

Examinons les critères ou les indices utilisés par l'enseignant pour rejeter cette production. Nous soulignons à cet effet une exigence de l'enseignant

> 1.30 E.A : " ... Il faut des choses plus précises ..."

C'est-à-dire que :
- Une droite ne peut être définie que si elle passe par deux points déjà définis.
- Un plan ne peut être défini que par trois points déjà définis.

> 1.2 E.A : "Bon c'est la même chose. Disons, la méthode est esquissée. “Je prends un plan contenant
> (IJ)” : il ne le nomme pas, il ne dit pas comment. “Ce plan coupe (BCD) selon une droite Δ”."

- Un point ne peut être défini que comme intersection de deux droites déjà définies.
- Les points introduits dans l'énoncé sont considérés comme des points définis.

Ces quatre critères sont des caractéristiques des constructions effectives. On peut dire que l'enseignant attend pour un problème du type PC_{ef} une construction effective et que toute construction évoquée est rejetée même si elle est correcte.
Nous pouvons formuler une règle relative aux productions des problèmes de constructions :

Règle - "Construction évoquée / PC_{ef}"

Une réponse correcte à un problème de construction du type PC_{ef} utilisant une construction évoquée est rejetée.

ii) Cas des exercices du type PC_{ev}
Dans le paragraphe I.2.a, nous avons souligné que les exercices du type PC_{ev} (exercices 2 et 4) ont été rejetés et considérés comme des "problèmes de construction". Les raisons avancées par l'enseignant sont au niveau de la résolution :

> 1.4 .E.A : "Celui-là, non. Même en Terminale, c'est limite. En fait, non. D'abord, c'est un problème de construction. Il y a un problème de condition nécessaire : la construction étant faite, est-ce que ça marche ? Et ensuite, il y a la condition suffisante : est-ce que ce que nous avons trouvé, ça va ? Et puis là, il y a des cas, par exemple, construire un plan et la droite D' coupe, ça dépend du point A, comment il est placé par rapport à la droite D'. Il y a toute une discussion là."

Ainsi, pour cet enseignant la résolution de ces problèmes de construction est caractérisée par deux phases, la première traite les "conditions nécessaires" et la deuxième traite les "conditions suffisantes" c'est la méthode de résolution par "analyse - synthèse". Cette démarche de résolution est caractéristique des problèmes de construction du type "PCO", où la tâche demandée est la construction d'un objet

vérifiant des conditions d'incidence. Dans le chapitre C1, nous avons montré que ces problèmes vivaient pendant la période 1 (1923-69) et étant absents de la période 3 (1982-94). Le rejet de l'exercice par rapport à la démarche de résolution (analyse - synthèse), est en conformité avec les résultats du chapitre C1, à savoir que les problèmes de construction ont évolué par rapport à l'algorithme de construction et par rapport à la démarche de résolution. Seulement, nous n'attendions pas à ce que l'exercice soit rejeté par rapport à la démarche de résolution, mais plutôt par rapport à l'algorithme de construction.
Si cet enseignant caractérise les problèmes de construction par la démarche de résolution "analyse - synthèse", alors :
- ou bien les problèmes de construction proposés dans les manuels ne sont pas considérés par cet enseignant comme des problèmes de construction dans l'espace, étant donné que la démarche de résolution des premiers n'est pas "analyse - synthèse",
- ou alors pour cet enseignant il y a deux types de problèmes de construction. Ceux qu'on traite dans l'enseignement actuel et ceux qu'on traite à d'autres niveaux (1.4 E.A: "Celui-là, non. Même en Terminale, c'est limite") se distinguant par la démarche de résolution.
C'est ce que nous proposons d'examiner dans le prochain paragraphe.

iii) Rapports de l'enseignant E.A à l'objet "problème de construction dans l'espace"
L'enseignant E.A n'a pas rejeté les productions EP.a et EP.b, utilisant une construction effective, mais il a relevé seulement qu'il manquait la justification. La production EP.3, utilisant une construction évoquée pour un problème du type PCef, a été rejetée. Autrement dit, une construction effective pour un problème du type PCef est conforme aux pratiques de l'enseignant et elle répond à ses attentes. Or, la démarche de résolution dans les productions EP.a et EP.b n'est pas la démarche par "analyse - synthèse".
Donc, les productions proposées à l'enseignant n'ont pas été analysées selon le critère démarche de résolution par "analyse-synthèse".
Nous avançons une hypothèse dans notre analyse :

L'enseignant avait, lors de l'entretien, deux rapports différents à l'objet "problèmes de construction dans l'espace". Ces deux rapports correspondent à deux époques de l'enseignement où les rapports institutionnels à l'objet de savoir sont différents.

Un premier rapport correspond au rapport institutionnel[15] à l'objet " problème de construction dans l'espace" avant la réforme des mathématiques modernes qu'on notera R1. C'est une période où les problèmes de construction sont du type "problèmes de

15 l'institution étant "l'enseignement secondaire"

construction évoquée, sans solide, dont la tâche est de construire un objet sous des conditions géométriques" (PCev-SS-Obj/cond). La démarche de résolution de ces problèmes est par "analyse-synthèse".

1.54 E.A: " Voilà et dire quand est-ce que ça existe, dans les vieux bouquins de TC, par exemple, il y avait tout un chapitre sur construire, sur ce qu'on entend par construire. Construire, c'est effectivement dire, si ce que je veux construire existe, nécessairement c'est comme ci c'est comme ça, raisonnement par conditions nécessaires, alors on est amené à trouver l'élément, mais il fallait discuter, c'est comme l'exercice 2"

Autrement dit, les exercices 2 et 4 ont été considérés comme des problèmes de construction, dont la démarche de résolution est "analyse-synthèse".

Un deuxième rapport correspond au rapport institutionnel actuel, qu'on notera R2. Ce rapport était la référence pour l'analyse des productions d'élèves.
A la fin de l'entretien, nous avons demandé à l'enseignant ce qu'il entendait par "les vieux bouquins de TC".

E.A: "Il s'agit des exercices qu'on traitait avant ou au début des années 70."

Ceci explique le fait que chaque exercice a été analysé selon le rapport institutionnel de l'époque où il vivait et où l'enseignant avait un tel rapport avec l'objet "exercice".
Ainsi, les exercices du type PC_{ev} ont été analysés selon le rapport R1. Nous avons montré que c'est plutôt la démarche de résolution, qui caractérise les problèmes de construction selon le rapport R1 pour cet enseignant.

Pour l'enseignant E.A on peut distinguer deux types d'exercices de construction :
- les exercices où la construction est systématique et algorithmique. Ici, on pense qu'il fait référence aux problèmes de construction actuels, dont la tâche est de construire l'intersection de deux objets donnés selon les règles d'une construction effective,
- les exercices où il faut construire un objet répondant à des conditions d'incidence. Dans ces exercices, il y a le problème d'existence de l'objet, qui conduit souvent à des discussions. Quant à la démarche de résolution, on utilise souvent, la démarche "analyse - synthèse". C'est bien le type d'exercices qui vivaient avant la réforme des mathématiques - modernes, sous le rapport R1.

b) Problèmes de construction pour l'enseignant E.B

Nous procéderons comme pour l'enseignant E.A.

i) Cas d'une construction évoquée pour un problème de construction effective
La production EP.c a été rejetée pour les mêmes raisons données par l'enseignant E.A :

41. E.B: "Le problème c'est qu'on sait pas où est la droite Δ. On ne sait pas la position de son plan. Ceci dit, quand il aura son plan où coupe-t-il le plan (BCD), on sait pas là. Il n'a pas tort. La première production elle est bien mais l'idée générale est absente, tandis que là il y a une idée mais on ne peut pas avec ça positionner un point. Celui là il a senti, mais le passage au dessin il n'a pas su faire."

On retrouve la même règle, *Règle - Pc_{ef}* : c'est-à-dire une réponse correcte à un problème de construction du type PC_{ef} utilisant une construction évoquée est rejetée. De plus, l'enseignant E.B explique que c'est le passage au dessin qui n'a pas été réussi par l'élève. Comme si "une construction effective est en partie du côté du dessin" et donc au niveau du procédé de tracé.

ii) Cas des exercices du type PC_{ev}
Nous avons vu que l'enseignant n'a pas rejeté les exercices 2 et 4 et qu'il a proposé des solutions utilisant des constructions évoquées, alors que dans sa classe et dans l'analyse des productions des élèves qu'on lui a proposées, il n'autorise que des constructions effectives.

iii) Rapports de l'enseignant à l'objet de savoir "construction dans l'espace"
Nous avons montré que l'enseignant E.B a manifesté deux rapports à l'objet "problème de construction dans l'espace".
Un rapport qui correspond au rapport institutionnel à cet objet de savoir dans l'institution "classe de seconde de l'enseignement actuel". C'est ce que nous avons nommé R2. C'est selon ce rapport qu'il a analysé les productions d'élèves (EP.a, EP.b et EP.c) et les exercices du type PCef.
Le deuxième rapport n'est pas en conformité avec le rapport institutionnel R2. C'est selon ce rapport qu'il a résolu les exercices qui ne vivent plus dans l'enseignement actuel c'est-à-dire les exercices du type PC_{ev} .

2.5. Conclusion

Nous avons essayé de caractériser les attentes de deux enseignants par rapport aux productions d'élèves relatives aux problèmes de construction dans l'espace. Au cours de la première étape[12], ces deux enseignants manifestaient des rapports aux problèmes de construction différents du rapport institutionnel à ces problèmes dans l'enseignement actuel. En revanche, dans la deuxième étape, ils avaient des rapports, aux problèmes de construction, conformes au rapport institutionnel R2[13]. Or, ce qui différencie ces deux étapes est la variable *élève*. En effet, dans la première ils devaient commenter des exercices sans production d'élèves, alors que dans la deuxième ces exercices sont accompagnés des productions d'élèves.

Autrement dit, dans la première étape, les enseignants manifestaient des rapports personnels à l'objet "problèmes de construction dans l'espace", qui ne sont pas en conformité avec le rapport institutionnel à l'objet "problème de construction dans l'espace" R2. Nous l'expliquons par le fait que pendant cette première partie, les enseignants commentaient les exercices non seulement en tant que sujets de l'institution "enseignement secondaire" mais aussi en tant que sujets d'autres institutions : "personne qui fait des mathématiques" (pour E.B) ou "manuels d'avant la réforme des mathématiques modernes" (pour E.A). Ces rapports personnels sont différents entre eux et différents du rapport institutionnel R2.

Dans la deuxième partie, devant les productions d'élèves qu'ils devaient évaluer, ils ont manifesté des rapports conformes au rapport institutionnel aux problèmes de construction dans l'institution "classes de Seconde et Première de l'enseignement français actuel". Ainsi, nous avons mis en évidence quatre critères pour que les productions d'élèves soient conformes aux attentes de l'enseignant : faire apparaître la stratégie adoptée, argumenter, discuter les différents cas si le dessin n'est pas donné et la construction doit être effective.

3. MISE EN PLACE ET ANALYSE DE LA PHASE 2

Dans la phase 1, nous avons montré que devant les productions d'élèves les enseignants ont analysé les productions d'élèves selon des attentes conformes au rapport R2. Certains critères de ce rapport R2, ont été dégagés d'abord dans le chapitre C2 et ensuite

12 Ces deux étapes ont été explicitées dans le paragraphe "principe et mise en place de la phase 3".

13 A chaque fois qu'on écrira

- "rapport" il sera sous entendu "rapport de l'enseignant à l'objet problème de construction dans l'espace"
- "R1" signifie rapport institutionnel à l'objet "problème de construction dans l'espace dans l'environnement papier crayon " dans l'institution "enseignement secondaire avant la réforme des mathématiques modernes"
- "R2" signifie rapport institutionnel à l'objet "problème de construction dans l'espace" dans l'institution "enseignement dans l'enseignement actuel".

par la phase 1. L'objet de la phase 2 est de reprendre certains de ces critères permettant d'étudier d'une part le statut du dessin qui accompagne un énoncé, et d'autre part les constructions effectives et évoquées selon le rapport R2.

3.1. Choix des Exercices-productions d'élèves et analyse a priori

Nous allons construire des exercices - productions d'élèves par un choix de certaines variables, au niveau de l'exercice et de la réponse de l'élève.
Les variables retenues pour le choix des exercices sont :
- "énoncé dessin" (ED) : énoncé avec dessin ou non,
- "type de problème" : construction effective ou évoqué
Les variables retenues pour le choix des productions sont :
- "tracé" : l'élève a réalisé ou non des tracés illustrant la construction,
- "discuter les différents cas" ou non pour l'existence de l'objets ou des objets à construire,
- "type de construction" : effective ou évoquée.

3.1.1. Variables "type de problème" / "type de construction

Etant donné qu'un problème de construction évoquée ne peut avoir de solution de construction effective, trois cas sont à distinguer :

a) Construction effective pour un problème de construction effective

Compte tenu des autres variables, trois exercices - productions sont proposés : EP.I, EP.II et EP.IIa.
D'après les résultats de la phase 1, les enseignants doivent analyser ces exercices - productions selon le rapport institutionnel R2. Nous cherchons en particulier à vérifier certains critères, que doivent vérifier les réponses d'élèves du type construction effectives.

b) Construction évoquée pour un problème de construction effective

Nous avons choisis l'exercice - production EP.III pour vérifier la validité de la règle suivante :

Règle "Construction évoquée / PC_{ef}"
Une réponse correcte à un problème de construction du type PC_{ef} *utilisant une construction évoquée est rejetée.*

c) Construction évoquée pour un problème de construction évoquée

Nous proposons deux exercices-productions EP.IV et EP.IVa, dont les productions sont correctes. Dans EP.IV, la solution utilise la règle d'usage RU(P,P) et dans EP.IVa la règle d'usage RU(P,D). Nous cherchons à voir, d'une part si les enseignants acceptent ou non les solutions correctes des problèmes de construction évoquée, d'autre part s'il y a une différence dans l'analyse des enseignants selon qu'on utilise la règle RU(P,D) ou RU(P,P). En effet, dans la conclusion[16] des commentaires de l'enseignant E.B de la phase 1, nous avons avancé une hypothèse selon laquelle l'utilisation de la règle d'usage RU(P,D) est plus mobilisée que la règle RU(P,P) dans les problèmes de construction évoquée. Pour cette raison, l'ordre des exercices ne sera le même pour tous les enseignants.

3.1.2. Tracé

Nous voulons savoir si la production d'un dessin est nécessaire dans les réponses d'élèves.

Règle "tracé dans la production"

Dans les problèmes de construction, l'élève doit produire un tracé, que l'énoncé soit accompagné ou non d'un dessin.

Pour les problèmes de construction évoquée, nous avons choisi des exercices sans dessin et les productions associées sans tracés. Nous avons fait ce choix en raison d'arbitraires au niveau des tracés. Cela ne change rien pour la mise à l'épreuve de la règle "tracé dans la production", étant donné que c'est l'absence du tracé qui sera contestée.

En revanche, pour les problèmes de construction effective, nous avons choisi des productions avec ou sans tracé et des exercices avec ou sans dessin.

3.1.3. Règle discussion

Nous cherchons à étudier la validité de la règle suivante :

Règle "discussion"

Pour que l'élève n'étudie pas les différents cas d'existence, l'enseignant donne un dessin sur lequel les éléments pertinents pour la résolution sont représentés.

Certes cette règle a été étudiée lors de la phase 1, mais nous n'avions pas étudié tous les cas que nous présentons dans le tableau suivant:

---

16 p. 228

		Problème proposé	
		avec dessin	sans dessin
Réponse de l'élève	avec les différents cas	EP.III	EP.II
	sans les différents cas	EP.I	EP.IIa

D'autres critères peuvent être évoqués lors de l'entretien comme la "justification" et la "stratégie adoptée". Le choix des exercices n'a pas tenu compte de leurs variations.

3.1.4. Choix des différentes variables

Toutes les productions contiennent des éléments de justification mais les niveaux de justifications peuvent changer d'un exercice à un autre. Cette variation n'a pas fait objet d'étude spécifique. Cependant, l'entretien peut nous permettre de voir si le niveau de justification des productions correspond à leurs attentes.

	Exercice/Prod	**EP.I**	**EP.IIa**	**EP.II**	**EP.III**	**EP.IV**	**EP.IVa**
E	CS	Oui	Oui	Oui	Oui		
X	ED	Oui			Oui		
E	Type de problème	PCef	PCef	PCef	PCef	PCev	PCev
P	Tracé	Oui	Oui	Oui			
R	Etudier l'existence			Oui	Oui	Oui	Oui
O	Construction effective	Oui	Oui	Oui			
D	Construction évoquée				RU(PP)	RU(PP)	RU(PD)

Tableau 42 : production d'élèves - Phase 2- [17]

3.1.5. Choix des enseignants et organisation de la séance

Nous avons choisi trois enseignants ayant un certain nombre d'années d'expériences au lycée, E1, E2 et E3. Pour chacun d'eux, on leur a présenté les exercices - productions et on leur a demandé de les commenter. L'enseignant E3 a travaillé individuellement; alors que les enseignants E1 et E2 ont travaillé simultanément. Nous avons fait ce dernier choix pour qu'au cas où les enseignants E1 et E2 n'aient pas les mêmes attentes et/ou

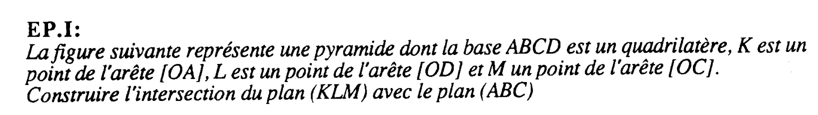
[17] Rappelons certains codes utilisés dans ce tableau:
CS: le cas où l'énoncé fait référence à un ou plusieurs solides;
ED: les énoncés qui sont accompagnés d'un dessin représentant les données;
PCef: un problème où la résolution peut se faire à l'aide d'une construction effective.
PCev : un problème où la réalisation sur un dessin ne peut se faire qu'à l'aide d'une construction évoquée:
RU(P, d): la production utilise une règle d'usage consistant à "tracer l'intersection, lorsqu'elle existe, d'un plan et d'une droite";
RU(P,P) la production utilise une règle d'usage consistant à "tracer l'intersection, lorsqu'elle existe, de deux plans;
EXE : Exercice / PROD : Production

même positions par rapport aux problèmes de construction, cette situation puisse les inciter à expliciter davantage leurs attentes.

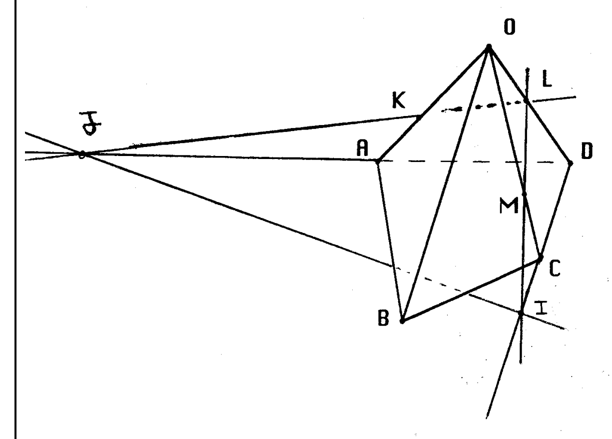
3.1.6. Construction des exercices-productions d'élèves

Pour le choix des exercices nous avons choisi des exercices étudiés dans la phase 1 pour des exercices-productions de la phase 2.
Pour l'exercice-production EP.I, nous avons choisi l'exercice 3, étudié dans la phase 1. Pour les exercices-productions EP.II et EP.IIa, nous avons choisi l'exercice 7. Enfin, pour les exercices-productions EP.IV et EP.IVa, nous avons choisi l'exercice 4.

Exercice-production EP.I



EP.I:
La figure suivante représente une pyramide dont la base ABCD est un quadrilatère, K est un point de l'arête [OA], L est un point de l'arête [OD] et M un point de l'arête [OC].
Construire l'intersection du plan (KLM) avec le plan (ABC)



Réponse:

Dans le plan (OCD) (LM) ∩ (CD) = {I}

I ∈ (LM) donc I ∈ (KLM)

I ∈ (CD) donc I ∈ (ABC)

Donc ~~J~~ [I] appartient à l'intersection des plans (KLM) et (ABC)

Dans le plan (OAD) (LK) ∩ (AD) = {J}

J ∈ (LK) donc J ∈ (KLM)

J ∈ (AD) donc J ∈ (ABC)

Donc J appartient à (KLM) et (ABC)

Donc J appartient à l'intersection des plans (KLM) et (ABC)

Comme I et J sont deux points distincts, (KLM) ∩ (ABC) = (IJ)

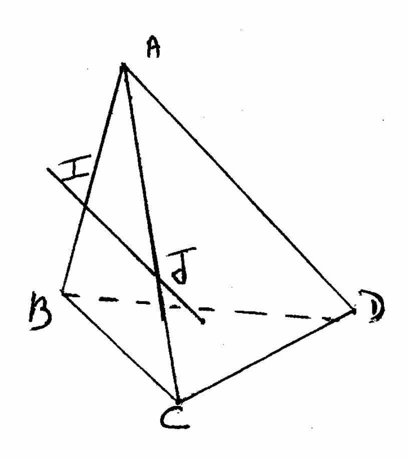
Exercice-production EP.II

EP.II:
Soit ABCD un tétraèdre. I est un point du segment [AB] et J un point du segment [AC]. Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).

Réponse:

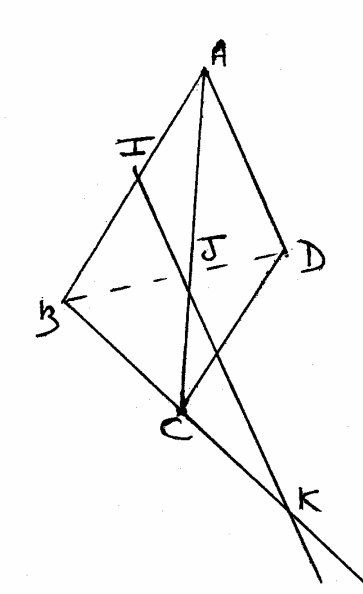
les droite (IJ) et (BC) sont coplanaires.

Si (IJ) // (BC) alors il n'y a pas d'intersection



Si (IJ) est sécante avec (BC) en K

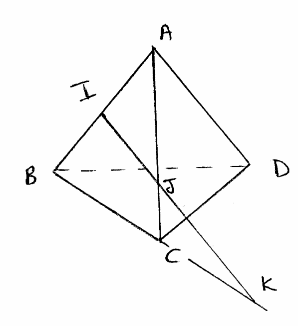
$(IJ) \cap (BCD) = \{K\}$



Exercice-production EP.IIa

EP.IIa:
Soit ABCD un tétraèdre. I est un point du segment [AB] et J un point du segment [AC]. Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).

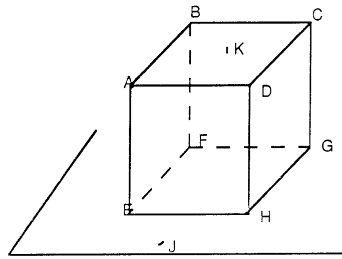
Réponse:



Dans le plan (ABC) les droites (IJ) et (BC) sont coplanaires.
Je prolonge (IJ), elle coupe (BC) en K.
comme K appartient à (BC), K ∈ (BCD)
donc (IJ) ∩ (BCD) = {K}

Exercice-production EP.III

EP.III:
ABCDEFGH est un pavé droit. K est un point du plan (ABC). J est un point du plan (FGH). Construire l'intersection de la droite (JK) avec le plan (ADE)



Réponse:

Si (JK) n'est pas parallèle à (ADE) l'intersection est un point I.
J'appelle P un plan qui contient (J.K).
I est un point qui appartient à P et à (AED) donc
P ∩ (AED) est une droite qui j'appelle Δ.
I est l'intersection de Δ et de ~~(IJ)~~. (JK)

Exercice-production EP.IV:

EP.IV:
Soit P un plan, d une droite sécante à P et A un point n'appartenant ni à d ni à P. Construire une droite passant par A, sécante à d et parallèle à P.

Réponse:

Soit Q le plan passant par A et contenant d.
comme d est sécante avec P, P et Q se coupent:
$P \cap Q = \Delta$
Dans le plan Q, je trace une droite passant par A
et parallèle à Δ.
cette droite est parallèle à P et elle passe par A.

Exercice-production EP.IVa

EP.IVa:
Soit P un plan, d une droite sécante à P et A un point n'appartenant ni à d ni à P. Construire une droite passant par A, sécante à d et parallèle à P.

Réponse:

je trace une parallèle à d passant par A. Je l'appelle d'.
comme d coupe P, d' coupe aussi P.
$d \cap P = \{I\}$ $d' \cap P = \{J\}$
la droite (IJ) est contenue dans P
~~la~~ je trace une droite passant par A et parallèle à (IJ).
Cette droite est ~~sécante~~ parallèle à P et passe par A.

3.2. Analyse de la phase 2

Dans cette partie nous analyserons les différents entretiens avec les enseignants autour des points suivants: dessin de l'énoncé, tracé de l'élève, construction effective et évoquée, justification et distinction entre "tracer" et "construire". Nous présentons un résumé des différentes réponses (tableau 2) pour chaque enseignant.

Ordre des présentations des exercices:
Ordre 1: EP.I, EP.IIa, EP.II, EP.III, EP.IV, EP.IVa : E1
Ordre 2: EP.I, EP.IIa, EP.II, EP.III, EP.IVa, EP.IV : E2, E3.

		EP.I	EP.IIa	EP.II	EP.III	EP.IV	EP.IVa
E1	Tracé	oui	oui	oui		à faire	à faire
	Discussion		à faire	oui			
	Construction	oui	oui	oui	non	non	non
	Justification	oui	oui	oui			
E2	Tracé	oui	oui	oui		à faire	à faire
	Discussion	oui	à faire	oui			
	Construction	oui	oui	oui	non	non	non
	Justification	oui	oui	oui			
	Autres	rédaction					
E3	Tracé	oui	oui	oui		à faire	à faire
	Discussion	oui	à faire	oui			
	Construction	oui	oui	oui	non	non	non
	Justification	oui	oui	oui			

Tableau 43 : Réponses des enseignants - Phase 2

Nous constatons une régularité de réponse pour les trois enseignants. Pour le cas des enseignants E1 et E2, il n'y a eu de désaccord entre eux que de façon ponctuelle.

3.2.1. Examen de la règle - discussion

Nous analyserons l'entretien avec les enseignants relativement aux deux variables : "problème avec ou sans dessin" et "la réponse distingue ou non les différents cas".

a) Exercice-production EP.I

C'est un problème avec dessin mais la réponse ne distingue pas les différents cas. Tous les enseignants ont manifesté le souci de vérifier dès le premier exercice, la question de distinction de différents cas

4. E3: "K, L et M sont donnés là ?" (elle montre le dessin)
5. Obs. : "Oui, ce que j'ai donné, c'est l'énoncé et le dessin, l'élève a produit ces réponses avec ce tracé"
7. E3 : "Les points K, L et M sont donnés, il n'y a pas d'histoire de parallélisme"

ou encore

4. E2 : "Et l'énoncé ne dit pas qu'on traite la figure dans le cas de la figure ?"
5. Obs. : "Non"
6. E1 : "Parce que là il fait la figure dans ce cas-là, mais les cas particuliers ne sont pas examinés"
7. E2 : "Et donc l'examinateur attend que tous les cas soient envisagés ?"
8. Obs. : "Je ne sais pas."
9. E1 : "Moi, il me semble qu'à partir du moment où la figure est donnée, on fait le dessin dans le cas de la figure, sinon on ne te donne pas les points K, L et M sur le dessin"

Les enseignants vérifient si le dessin est donné ou non pour savoir s'il faut exiger la discussion des différents cas, dans le sens de la règle - discussion. L'enseignant E1 a explicité cette règle.

b) Exercice-production EP.IIa

Pour l'enseignant E3, s'il n'y a pas de dessin dans l'énoncé alors il faut distinguer les différents cas.

13. E3 : "Oui, là c'est pareil ... par contre là, s'il n'y a pas de figure, il aurait pu penser au cas où c'était parallèle... Eh ben non, au niveau du texte, «construire l'intersection» donc, si on lui demande construire c'est qu'on suppose qu'il y en a une, alors comme c'est pas précisé, si (IJ) est parallèle à la droite (BC) il n'y a pas de points d'intersection. Au niveau du texte, puisqu'on lui demande de construire l'intersection, on ne peut pas trop le pénaliser de ne pas avoir pensé à ce cas là!"

Il évoque un implicite : lorsqu'on demande "construire l'intersection" c'est qu'elle existe. Pour cette raison, il préfère préciser "construire si possible" si on veut que l'élève distingue les différents cas. Compte tenu de sa première remarque, si le dessin est donné alors il n'est pas nécessaire de discuter les différents cas.

Les enseignants E1 et E2, ont évalué la production par rapport à la règle - discussion.

25. Obs. : "On passe au deuxième exercice"
26. E2 : "C'est toujours la même remarque, on se place dans le cas de la figure."

27. Obs. : "La figure n'était pas donnée. Si la «réponse» est avant ça veut dire que c'est l'élève qui a produit le dessin."

28. E1 : "Alors là il n'a pas distingué les deux cas"

29. Obs. : "A votre avis, là il faut qu'il distingue les deux cas ?"

30. E1 : "Ah oui. Si (IJ) est parallèle à (BC) il n'y a pas d'intersection. Il met bien qu'ils sont coplanaires mais il ne distingue pas les différents cas"

Les autres exercices n'ont pas été commentés par rapport à ce point.
Ces résultats confirment la validité de la règle - discussion.

3.2.2. Examen de la règle "tracé dans la production"

Soulignons d'abord qu'aucune remarque n'a été faite à propos de tracé dans les exercices-productions EPI, EP.II et EP.IIa, où l'"élève" a fournit un tracé dans toutes ces productions.
Dans l'exercice-production EP.III, l'énoncé est accompagné d'un dessin mais l'élève n'a pas réalisé de tracé sur ce dessin. L'absence de tracé n'a pas été contestée par les enseignants, étant donné qu'ils ont évalué que l'élève n'a donné que la méthode sans la construction.

33 E1 : "Il dit comment il faut faire, mais il ne l'a fait pas! ..."

21 E3 : Le seul problème c'est qu'il n'a pas pu construire le plan P ..."

En revanche pour EP.IV et EP.IVa, les enseignants ont commencé par contester l'absence du dessin avant l'analyse des réponses.

37. Obs. : "On va passer à l'exercice IV"

38. E2 : "Pas de figure"

39. E1 : "Rien"

40. Obs. : "Non"

41. Ils lisent la solution.

42. E1 : "Moi, il faut que je fasse la figure pour comprendre"

Remarquons que l'enseignant E1, a besoin d'un dessin pour comprendre la solution de l'élève. On retrouve la fonction du dessin, de représentation et d'illustration.
L'enseignant E3, estime que s'il n'y a pas de dessin alors "le but n'est pas atteint" :

29. E3: "C'est bizarre qu'il ne fasse pas de dessin!"

30. Obs. : "C'est possible qu'il en ait fait sur son brouillon"

31. E3: "Ah d'accord"

32. E3: "Ici, c'est construire, le but n'est pas atteint".

33. E3 lit la production.

34. E3: "Donc là le problème, c'est d'abord il n'a pas fait la construction, on ne la voit pas, il n'a répondu à la question posée ... "

Ceci, montre que l'absence du dessin dans la production, est contestée par les enseignants. En fait, l'élève doit faire des tracés, que l'énoncé soit accompagné ou non d'un dessin, comme l'a explicité l'enseignant E3, en précisant ce qu'il entendait par "construire dans l'espace".

45. E3 : "En géométrie dans l'espace, pour moi construire c'est voir effectivement. Si c'est construire une intersection, voir le point d'intersection sur un dessin, donc si le cadre est donné au début, l'élève complète pour que le point d'intersection soit effectivement sur le dessin, et si le cadre n'est pas donné, il faut que l'élève fasse lui même le dessin. Et c'est vrai quand on demande construire, on attend à la fois ce que je viens de dire, c'est-à-dire de voir le point, et en plus l'explication, c'est-à-dire comment on est arrivé à cette construction, c'est-à-dire dans les premières productions là, un élève qui mettrait seulement on dirait qu'il a construit, mais qu'il n'expliquerait pas tout ce qui est ici n'aurait pas le maximum des points, il aurait peut-être que la moitié. On lui dirait. Donc, c'est vrai, on devrait mettre. En fait, dans construire on attend de le voir, et implicitement une justification."

On peut donc déduire que le tracé est exigé dans les productions d'élèves.[18]

3.2.3. Examen de la règle "Construction évoquée / PCef"

L'étude de cette règle se fait par l'analyse des réactions des enseignants pour EP.III.
Pour les enseignants, l'élève n'a donné que la méthode générale qu'on lui a expliquée.
L'enseignant E1 :

34. E1 : "Il dit comment il faut faire, mais il ne la fait pas! Δ elle est où ? P il est où ? il n'a rien fait! C'est la méthode. On a dû lui expliquer, pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan, il fallait prendre un plan auxiliaire, mais il n'a pas su trouver lequel quoi. Il y a quelqu'un qui l'a fait celui là ?"

L'enseignant E3

21. E3: "C'est bien, le seul problème c'est qu'il n'a pas pu construire le plan P contenant (JK). En fait, là il y a une idée quand même, on leur dit des fois «pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan, on prend un plan auxiliaire qui contient cette droite, et à ce moment là ce plan auxiliaire coupe le plan (ADE) selon une droite Δ, donc le point d'intersection appartient à la droite Δ et à la droite (JK)». Donc il a une idée, il n'a pas trouvé le plan P. C'est pas construit, on lui demande de construire, moi je mettrais pas 0, là l'idée se tient, donc il a une idée de départ, le problème c'est qu'il n'a pas trouvé le plan P."

---

18 Il aurait fallu proposer un exercice du type "Construction effective pour un problème de construction effective" sans tracé dans la production, pour avoir plus d'éléments de validation de cette règle.

On retrouve la méthode explicitée dans les manuels[19] : Pour déterminer l'intersection d'une droite d et d'un plan P, on choisit un plan P', dit plan auxiliaire, contenant d et sécant avec P selon d'. Seulement il faut choisir un plan P' de sorte que son intersection avec P', la droite d', soit facile à déterminer.

21. E3: " ... donc il a une idée de départ, le problème c'est qu'il n'a pas trouvé le plan P."

34. E1 : " ... il fallait prendre un plan auxiliaire, mais il n'a pas su trouver lequel quoi."

De plus, les plans auxiliaires peuvent être définis par les points donnés du problème :

25. E3: "Donc le plan P qu'il cherchait pouvait être ce plan, qui est parallèle à (AB) etc., Oui c'est pas évident; pour un exercice de première je ne trouve pas ça évident. Parce que souvent les plans auxiliaires qu'on trouve se trouvent avec des points, alors là j'ai essayé j'avais un peu le réflexe d'essayer de tracer (AK), c'est pas comme ça qu'on doit pouvoir y arriver ... "

Pour cet enseignant, cet exercice est en rupture du contrat didactique pour le choix du plan auxiliaire. En effet, dans les exemples traités dans les manuels, le plan auxiliaire est défini par les sommets du solide, alors que dans la production le plan auxiliaire est défini par la droite d et un sommet du solide".
Nous concluons par la validité de la règle "Construction évoquée / PCef".

3.2.4. Examen des exercices-productions du type "construction évoquée pour les problèmes PCev"

Il s'agit de EP.IV et EP.IVa. Les productions ont été rejetées par les enseignants, mais aucun commentaire n'a été fait à propos de l'énoncé. L'ordre des exercices n'était pas le même pour tous les enseignants. Nous examinerons donc E1 et E2 d'une part et E3 d'autre part.

a) Enseignants E1 et E2

Ils ont eu l'ordre EP.IVa puis EP.IV.

i) <u>Cas de EP.IVa</u>
Pour suivre la solution, l'enseignant E1, commence par faire le dessin.

42. E1 : "Moi, il faut que je fasse la figure pour comprendre"

Il dessine les données du problème avec le point I à l'intérieur du parallélogramme, les pointillés pour les parties cachées, selon les conventions de représentation.
Ensuite, l'enseignant E1 pose le problème du point J :

---
19 Cf. Chapitre C1 , p.163

44. E1 : "Oui, le point J il le dessine comment ?"

45. E2 : "Au pif!"

E1 propose alors la démarche qu'il fallait suivre, comme si c'était un problème de construction effective donc selon l'un des schémas caractérisant les problèmes de construction effective. (Chapitre C1, p. 163)

46. E1 : "Il fallait qu'il trouve l'intersection du plan (A,d) avec le plan P, il n'a pas fait, c'est pour ça qu'il n'y a pas de figure."

Nous leur avons demandé si c'est la production qu'ils rejettent

47. Obs. : "Donc c'est une production que vous rejetez ?"

48. E2 : "La construction n'est pas faite"

49. Obs. : "S'il avait produit un dessin"

50. E1 : "Non, même pas, de toute façon ce point là, le point J, il n'explique pas comment on peut l'obtenir "

51. E2 : "Comment on va le placer sur le dessin"

52. E1 : "Le dessin peut bien être fait au pif comme j'ai fait là"

Donc, la production n'a pas été rejetée pour l'absence du dessin, mais par rapport au fait qu'elle ne fournit pas un algorithme de construction selon les règles de construction effective développées dans le chapitre C1 (p. 163). Mais c'est au niveau du dessin que les enseignants justifient le rejet de la production, parce qu'elle ne donne pas un procédé de tracé selon les règles de construction effective.

ii) <u>Cas de EP.IV</u>

Nous leur avons demandé d'examiner une autre production pour le même exercice.

53. Obs. : "Pour le même exercice, on a une autre production"

54. E2 : "Il n'y a toujours pas de dessin!"

55. E1 : "C'est pareil sans le dire. Là, il comprend qu'il faut trouver l'intersection de ces deux plans, mais il n'explique pas comment. Il y a quand même l'idée de l'intersection des deux plans."

Cette production a donc été contestée. Cependant, pour E1 l'élève a mobilisé la bonne méthode mais sans la mise en oeuvre en tant que construction effective. D'où notre question :

56. Obs. : "Entre les deux quelle est la plus proche de ce que vous attendiez ?"

57. E2 : "C'est plutôt celle-là la deuxième"

Cette solution qui est correcte a été considérée comme incomplète.

58. E1 :"Moi je n'ai pas vraiment d'idée sur la question"
59. E2 : "C'est étonnant qu'ils n'ont pas fait de dessin ni sur l'un ni l'autre !"
60. Obs. : "Peut-être qu'ils l'ont fait sur une feuille de brouillon"
61. E2 : "Ah, c'est pour ça. Mais là il voyait bien que ça marche pas"
62. E1 : "Oui, moi je pense que le fait qu'il n'y a pas de dessin, prouve bien qu'ils ont ressenti que la construction n'était pas donnée précisément. Ils se sont rendu compte qu'il manquait quelque chose."
63. E2 : "C'est la règle du jeu que rien ne se trace au pif ..."

Dans le cas où l'élève a fait le dessin au brouillon, l'enseignant E2 pense que l'élève aurait dû se rendre compte que la construction qu'il propose ne convient pas par rapport à la règle énoncée par les enseignants E2 et E3. Le dessin est un moyen de vérifier le caractère effectif de la construction. L'enseignant E1 pense que l'absence du dessin montre que l'élève n'a pas réussi à construire le point J de façon précise, c'est-à-dire sans arbitraires. E2 confirme en évoquant la règle selon laquelle, on ne peut rien tracer de façon arbitraire.

64. E1 : "Moi je ne le donnerais pas."
65. E2 : "Moi, aussi"
66. E1 : "Mais ça peut servir pour montrer que ce qu'il montre c'est pas précis."

Pour les deux enseignants, cet exercice ne peut être donné en évaluation. Cependant, E1 pense qu'on peut le proposer pour montrer aux élèves que "ce n'est pas précis"

b) Enseignant E3

Il a eu d'abord EP.IV puis EP.IVa.

i) Cas de EP.IV

Après les remarques sur l'absence du dessin, l'enseignant examine la solution.

33. E3 lit la production.
34. E3: "Donc là le problème, c'est d'abord il n'a pas fait la construction, on ne la voit pas, il n'a pas répondu à la question posée. Et puis en plus ici, moi je ne peux pas faire la construction qu'il a dit, le plan Q il est défini d'accord, on voit bien, et P et Q se coupent suivant Δ, mais comment tracer Δ ? C'est pas mal finalement, moi j'ai pas cherché avant, avec ce qu'il dit, P et Q se coupent suivant Δ, c'est juste mais comment je trace Δ. Et puis après effectivement, si on a Δ, on trace dans ce plan la droite passant par A et parallèle à Δ."

E3 constate que la méthode est juste mais le problème est de déterminer comment tracer la droite Δ.

ii) Cas de EP.IVa

L'enseignant compare les deux solutions EP.IV et EP.IVa

37. E3 lit la production.
38. E3 : "Le problème c'est où poser le point J ? Et ben là c'est pareil, au niveau de la théorie, les deux théories sont exactes, mais ce qu'on demande c'est la réalisation, et là ça n'avance pas, comment je trouve l'intersection, le point J."

Il soulève alors le problème de la détermination du point J. Toujours à la recherche d'une solution "exacte", au sens construction effective, il demande s'il n'y a pas d'autres solutions.

39. E3: "Est-ce qu'il y a une autre avec la solution finale ?"
40. Obs. : "Pour cet exercice, il n'y a pas de moyen de construire le point J de façon précise."
41. E3: "Ah ça me rassure"
42. E3: "C'est un exercice qui est intéressant, qu'on pourrait le donner en modules, où ils sont moins nombreux, leur poser le problème, les faire venir au tableau, les un après les autres, et puis après voir qu'on n'y arrive pas. C'est intéressant, dans la mesure, un texte donné comme ça ... on demande quelque chose qui est impossible. Ou mettre «construire si possible»."
43. E3: "Quand c'est un texte à l'oral on leur dit construire la droite, et puis à la fin, bien c'était un piège on ne peut pas. Mais quand c'est un écrit, le texte est faux, puisqu'on ne peut pas construire. Je le donnerais pas en texte écrit officiel."

Sachant qu'on ne peut pas construire le point J sans arbitraires, l'enseignant pense que cet exercice peut être intéressant dans la mesure où on demande la construction de "quelque chose" qui est impossible ! Donc pour cet enseignant le problème n'a pas de solution puisqu'on ne peut fournir une construction effective de la droite à construire.

c) Conclusion

Les deux productions sont rejetées par les enseignants pour les mêmes raisons : la solution de EP.IV ne permet pas la "construction" du point J et la solution de EP.IVa ne permet pas la "construction" de la droite Δ. La construction est utilisée dans le sens de construction effective. Le dessin est un moyen pour vérifier la réalisation de la construction selon les règles de la construction effective.

Au moment de l'analyse, les enseignants pensaient que les élèves n'avaient pas trouvé la solution du problème. Tout se passe comme si l'exercice était un problème de construction effective. Il admet donc une construction effective que les élèves n'ont pas trouvé. Autrement dit, l'analyse a été faite selon le rapport institutionnel R2.
Une fois qu'on a expliqué à l'enseignant E3, que ces exercices ne pouvaient pas être résolus sans règles d'usage au niveau du tracé, il les a considéré comme exercices hors contrat et intéressants à proposer aux élèves : "on leur demande de construire un objet qui est impossible à construire", "des constructions imprécises!".
Nous avons montré que l'analyse des solutions est faite selon la technique développée dans les manuels (Cf. Chapitre C2), en particulier l'utilisation et le choix d'un plan auxiliaire pour la détermination de l'intersection d'une droite et d'un plan.

3.2.5. Justification

Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe 3.1.4 (p.244), l'entretien peut révéler des indices sur le niveau de justification des productions d'élèves exigé par les enseignants. Rappelons que la dimension de justification n'a pas fait objet d'une étude spécifique dans notre travail.

Pour évaluer le niveau de justification, les enseignants ont demandé dans quel contexte l'exercice a été proposé. Les enseignants E1 et E2 l'ont demandé dès la lecture de la production EP.I,

17. E2 : "Il faut quand même préciser que les plans ne sont pas confondus. A la fin, «comme I et J sont deux points distincts, l'intersection des deux plans c'est la droite (IJ)» pour la rédaction il faut justifier que les deux plans sont distincts"
18. E1 : "Oui, il faut le préciser"
19. E2 : "C'était un devoir à la maison ?"
20. Obs. : "Non, c'était en classe, ils avaient un brouillon, puis il recopiaient sur cette feuille la rédaction finale, le temps n'était pas limité"

L'enseignant E3, a précisé le niveau de justification selon que l'exercice est donné en devoir surveillé ou en classe :

17. E3 : "Là je dirais que c'est bien... Alors là par contre il n'explique rien. Disons, les deux premières productions ont des explications, de mon point de vue, ça suffit, là dans un devoir c'est peut-être un petit peu juste; on aimerait qu'il justifie un peu, donc qu'il dise que (IJ) et (BC) sont toutes les deux dans le plan donc elles se coupent ... "

Donc, la justification est nécessaire dans les problèmes de construction. Le degré de justification dépend du contexte dans lequel l'exercice est proposé : devoir à la maison, en classe, contrôle. Les exigences peuvent changer d'un enseignant à un autre.

4. CONCLUSION

L'analyse des exercices et productions des élèves était faite selon le rapport de l'enseignant à l'objet "problème de construction dans l'espace".

Dans la première partie de la phase 1, les enseignants (E.A et E.B) n'ont pas eu le même rapport à l'objet "problème de construction" lors de l'analyse des exercices sans production :
- l'enseignant E.A, a rejeté les problèmes de construction évoquée, à partir de l'énoncé, sans production d'élèves, en justifiant que ce sont des exercices qu'on ne traite plus actuellement en raison de la démarche de résolution par "analyse-synthèse",
- l'enseignant E.B n'a pas rejeté les problèmes de construction évoquée, et il a proposé des solutions évoquées. Alors que dans la deuxième partie de la phase 1, il a rejeté toute construction évoquée.

Dans la deuxième partie de la phase 1, les enseignants ont analysé les exercices - productions d'élèves selon un rapport en conformité avec le rapport institutionnel à l'objet "problème de construction dans l'espace" dans l'institution "enseignement secondaire actuel" (R2). Par exemple, l'enseignant E.B, a rejeté une construction évoquée dans une production d'élève (se qui est conforme au rapport institutionnel R2) alors que dans la première partie, il a proposé une construction évoquée dans l'analyse des exercices. Nous avons considéré l'analyse des exercices-productions comme une garantie pour que les rapports des enseignants soient en conformité avec le rapport institutionnel au cours de la phase 2.

Les réactions des enseignants aux productions d'élèves nous ont apporté des réponses aux questions posées au début du chapitre. Nous nous limiterons pour notre analyse à la deuxième partie de la phase 1 et la phase 2.

Examen de la question (a)

Quels sont les types de problèmes de construction que l'enseignant rejette ou accepte ? En particulier : un problème de construction évoquée peut-il vivre dans l'institution "classe" ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

Tous les exercices du type "problème de construction effective" ont été acceptés. En revanche, les exercices du type "problèmes de construction évoquée" ont été rejetés.
Les enseignants ont rejeté d'abord les productions d'élèves, correspondant à ces exercices, étant donné qu'elles ne répondaient pas aux critères de problèmes de construction effective. Ces exercices étaient considérés par les enseignants comme des "problèmes de construction effective", auxquels ils n'ont pas "encore" trouvé la solution (effective). Une fois, qu'ils ont pris conscience que ces exercices ne peuvent être résolus sans l'utilisation de règles d'usage, et donc d'arbitraires au niveau du tracé, ils les ont rejetés[20]. Autrement dit, ces enseignants n'acceptent pas les problèmes de construction où l'on utilise des règles d'usage au niveau du tracé, car les réponses sont considérées comme incomplètes. Ceci vient confirmer notre hypothèse "papier-crayon" :

Les problèmes de construction effective (PCef) et construction évoquée (PCev) ne peuvent pas coexister sur l'environnement papier-crayon, puisque chacun d'eux nécessite un contrat différent par rapport aux productions d'élèves.

Examen de la question (b)

Quelles sont les attentes de l'enseignant par rapport aux productions d'élèves pour les problèmes de construction ?

Les régularités issues de l'analyse des manuels du chapitre C1 et d'observations de classe nous ont permis conjecturer des critères que doivent vérifier les réponses d'élèves à des problèmes de construction effective observés par nous même. Pour les valider, un choix d'exercices et de productions a été fait de sorte que les productions ne répondent pas simultanément à tous les critères.
Les réponses d'élèves aux problèmes de construction effective doivent être accompagnées des éléments suivants : dessin, algorithme de construction et justification.

Dessin

Sur lequel l'élève laisse les traces de sa construction.

Algorithme de construction

20 Ils les ont rejeté par rapport aux objectifs des problèmes de constructions selon le rapport R2. Ainsi, ils ont attribués d'autres objectifs à ces exercices "construction impossibles","constructions imprécises".

Il indique les différentes étapes selon les primitives des problèmes de construction effective. Dans le cas où ceux-ci utilisent des primitives comme "intersection de deux plans", la production est alors rejetée avec l'argument[21] qu'elle "ne permet pas de construire". D'où la règle "Construction évoquée / PC_{ef}":

Une réponse correcte à un problème de construction du type PC_{ef} utilisant une construction évoquée est rejetée.

Justification
le degré de justification dépend de l'enseignant et du contexte dans lequel l'élève résout l'exercice (devoir à la maison, devoir surveillé, module, ... etc.)

Examen de la question (c)
Quel est le statut du dessin qui accompagne un énoncé ?

Nous avons mis en évidence une clause du contrat didactique, que nous avons appelée règle "discussion" :

Pour que l'élève n'étudie pas les différents cas d'existence, l'enseignant donne un dessin sur lequel, les éléments pertinents pour la résolution sont représentés.

Ce chapitre nous a permis de confirmer l'hypothèse de recherche "papier-crayon" et de caractériser les attentes des enseignants par rapport aux productions d'élèves relatives aux problèmes de construction en géométrie dans l'espace.
Le dessin est exigé par les enseignants dans les productions d'élèves. De plus, la réalisation du tracé est un moyen de vérifier le critère effectif de la construction. Ainsi, la négociation des éléments du contrat didactique se fait par des exigences au niveau du tracé.
Nous proposons dans le chapitre D2 de reprendre ce dispositif expérimental auprès des enseignants ayant utilisé un environnement informatique.

21 De l'enseignant.

PARTIE D

CHAPITRE D1

ENVIRONNEMENTS INFORMATIQUES POUR LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier le rôle d'un environnement informatique relativement aux fonctions du dessin, modèle d'un objet géométrique de l'espace.
Dans un premier temps, nous étudierons dans quelle mesure, un environnement informatique permet d'élargir les domaines d'interprétation et de fonctionnement associés au dessin, modèle d'un objet géométrique de l'espace.
Dans un deuxième temps, nous analyserons la vie des problèmes de construction dans l'espace dans un environnement informatique pour mettre à l'épreuve l'hypothèse de recherche selon laquelle les problèmes de construction effective et évoquée peuvent coexister dans des environnements informatiques répondant à certains critères.

Dans le chapitre A, nous avons montré que le domaine d'interprétation d'un dessin, modèle d'un objet géométrique dans l'espace, est très réduit, et fonctionne selon des règles différentes de celles du dessin, modèle d'un objet géométrique du plan. De même, le domaine de fonctionnement d'un dessin, modèle d'un objet géométrique dans l'espace, est très réduit. Ces deux éléments entraînent que la fonction d'expérimentation du dessin papier-crayon ne peut pas être remplie, au même titre que dans le plan (conclusion 3, chapitre A, p.41).
Nous avons formulé, dans le chapitre A, que certains environnements informatiques, de par la gestion des objets et relations géométriques, offrent au dessin, modèle d'un objet géométrique du plan, un domaine de fonctionnement plus important et des moyens pour disqualifier les interprétations illicites. Cela nous a conduit (chapitre A, p.40) à émettre une hypothèse de travail "dessin - environnement informatique" pour le cas de la géométrie plane.

Sous certains critères, l'environnement informatique peut élargir le champ d'expérimentation du dessin modèle d'un objet géométrique plan.

Nous proposons d'examiner dans ce chapitre si l'environnement informatique peut élargir le champ d'expérimentation du dessin dans le cas de la géométrie dans l'espace.

De plus, nous étudierons dans quelle mesure les problèmes de construction effective et évoquée peuvent coexister dans des environnements informatiques répondant à certains critères.

1. PROBLEMATIQUE DU DESSIN DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE

Pour tout environnement informatique d'apprentissage, les concepteurs sont amenés à faire des choix au niveau de l'interface, et par là au niveau de l'univers interne[1].
Ces choix peuvent devenir des contraintes spécifiques à l'environnement informatique : contraintes de l'interface et contraintes de contenu.
Les objets de savoir vont donc vivre dans un environnement informatique non seulement sous les contraintes de la transposition didactique mais aussi sous d'autres contraintes spécifiques à l'environnement informatique, notion introduite par Balacheff (1994a, p.364)

> "Aux contraintes de la transposition didactique s'ajoutent, ou plutôt se combinent, celles de modélisation et d'implémentation informatiques: contraintes de la *modélisation computable*, contraintes logicielles et matérielles des supports informatiques de réalisation.
> Ce que l'on place habituellement sous le terme d'informatisation ne constitue pas une simple translitération, les environnements informatiques d'apprentissage résultent d'une construction qui est le lieu de transformations nouvelles des objets d'enseignement. Nous appelons *transposition informatique* le processus ainsi à l'oeuvre."

L'introduction des environnements informatiques dans le système d'enseignement peut modifier les rapports des sujets aux objets mathématiques puisque ces derniers vont vivre autrement que dans l'environnement papier-crayon. Ils peuvent offrir des possibilités pour la vie des objets d'enseignement que d'autres environnements, comme papier-crayon, ne peuvent pas offrir. Comme le souligne F. Bellemain (1992, p. 89):

> "La transplantation dans l'environnement informatique de modèles et de la matérialisation qui les accompagne présente d'autres intérêts généraux. L'ordinateur s'assurant de produire, pour chaque objet du modèle élaboré, la matérialisation qui lui correspond, une plus grande possibilité est offerte de manipuler les essais et les tests de conjecture. On peut ainsi envisager la mise en place de situations d'exploration ou d'expérimentation, difficiles à créer avec les matériaux qu'impliquent ces situations dans le modèle considéré."

---

1 Balacheff (1994a) distingue trois univers relatifs à un dispositif informatique : l'univers interne de la machine, l'interface comme lieu de communication entre l'utilisateur et le dispositif informatique et enfin l'univers externe, dans lequel on trouve l'utilisateur "et où lui sont éventuellement accessibles d'autres dispositifs" (Balacheff, 1994a, p. 365).

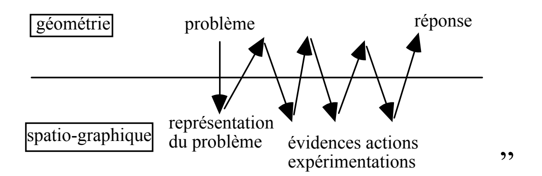
Pour ces questions, il nous semble qu'une étude d'un point de vue didactique est nécessaire. Nous n'envisageons pas de faire cette étude, dans le cadre de notre recherche, mais d'étudier des choix effectués et des possibilités offertes par deux environnements informatiques choisis (Geospace et Cabri-3D) par rapport aux questions que nous nous sommes posées.

Balacheff (1994b, p.33) caractérise un micromonde par l'articulation d'un système formel et d'un domaine de phénoménologie :

> " - le système formel est constitué d'objets primitifs, d'opérateurs élémentaires et de règles exprimant comment peuvent être manipulés objets et opérateurs;
> - le domaine de phénoménologie détermine le type de feedback que le micromonde peut produire comme conséquence des décisions et des actions de l'utilisateur."

Ainsi, la dimension expérimentale du dessin relève du domaine de phénoménologie. En effet, nous avons vu que la fonction d'expérimentation du dessin s'inscrit dans des allers et retours entre les connaissances géométriques et les lectures spatiales et qu'elle est subordonnée aux domaines de fonctionnement et d'interprétation du dessin. Cela rejoint une hypothèse de travail adoptée par Laborde et Capponi (1995, pp. 266-267) pour l'analyse de résolution de problème de géométrie dans un environnement informatique :

> " l'élaboration d'une solution à un problème de géométrie est faite d'une succession d'allers et retours entre théorie et spatio-graphique selon le schéma suivant:



"

Nous nous intéressons donc aux rétroactions des environnements informatiques à des déplacements ou à l'utilisation des primitives géométriques par le sujet. Ces rétroactions dépendent de l'univers interne et de l'interface. Ces éléments confèrent à l'environnement informatique une dimension d'expérimentation, comme l'ont souligné Laborde et Capponi (1994, p. 177) :

> "Comme dans toute situation, les rétroactions du milieu peuvent être sollicitées par le sujet qui décide de se livrer à certaines actions dont la sanction par le

> milieu fournira des éléments d'information sur sa production. Il s'agit en quelque sorte d'une *expérimentation dans le modèle* fourni par l'environnement informatique."

Nous distinguons deux types de rétroactions : perceptives ou sous forme de messages.

Par rétroactions perceptives, nous entendons toute information spatiale pouvant être lue sur le dessin. Elles sont des réponses à deux types d'actions du sujet : utilisation des primitives géométriques et manipulation directe.
Par rétroactions "messages", nous désignons tout message envoyé par l'environnement sous forme de texte en réponses à une action du sujet. Nous nous intéressons seulement aux rétroactions relatives au contenu. Par exemple, en demandant l'intersection de deux droites parallèles, l'environnement peut envoyer le message "ces droites sont parallèles".

Ces deux types de rétroactions, perceptives et par des messages, dépendent de trois pôles : manipulation directe, primitives géométriques et choix de représentation (fig. 65).

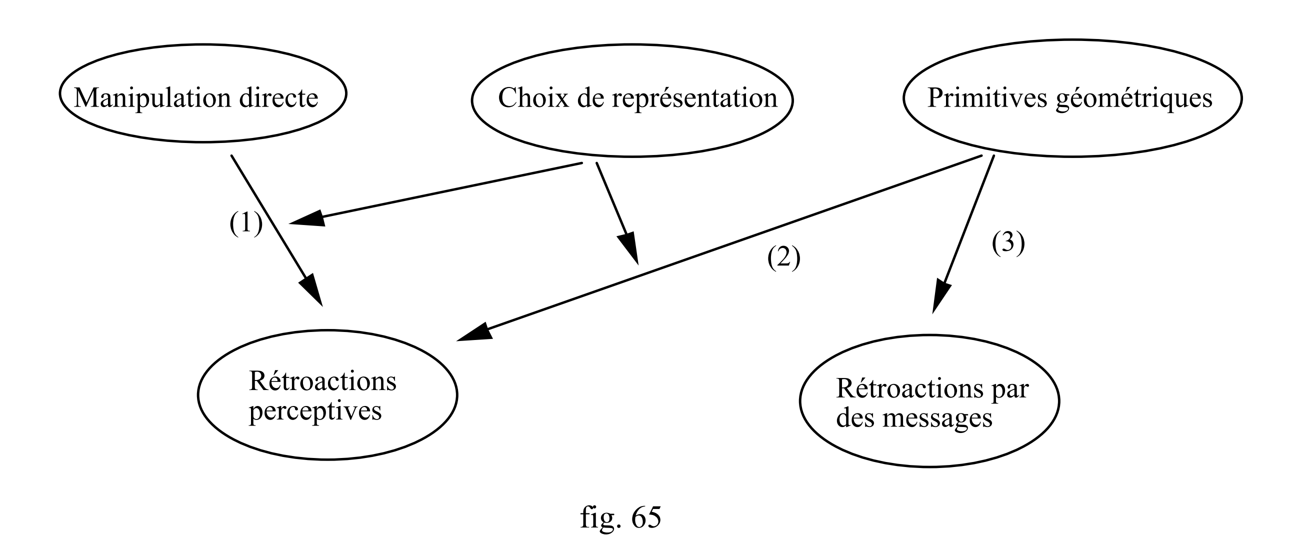


fig. 65

Le pôle "choix de représentation" concerne les choix du concepteur pour représenter les objets géométriques. Par exemple, dans le cas de la géométrie dans l'espace, des choix peuvent être relatifs au mode de représentation (perspective cavalière ou autre), l'utilisation ou non des représentations-types (Chapitre A), l'ombrage, l'opacité des objets, ... etc.

Nous proposons d'examiner les deux types de rétroaction par rapport aux domaines de fonctionnement et d'interprétation d'un dessin dans l'environnement informatique qu'on

notera "dessin-ei". Nous présentons ci-dessous quelques éléments, sous forme de questions, susceptibles d'élargir le champ d'expérimentation du dessin-ei. Nous les utiliserons comme une grille d'analyse des environnements informatiques

Rétroactions perceptives

Nous présentons ci-dessous des questions portant sur les choix des concepteurs relatifs aux rétroactions perceptives. Nous avons relevé deux catégories de choix possibles. Ceux qui dépendent des primitives géométriques et des choix de représentation et ceux qui dépendent de la manipulation directe et des choix de représentation.

1. Eléments dépendants des primitives géométriques et des choix de représentation (fig. 65, (2)).

Q1.a - *Quels sont les objets de base qui sont représentés ?*
En particulier, représentation d'un plan, des solides usuels comme la sphère.

Q1.b - *Un objet défini à partir des primitives géométriques est-il représenté sur le dessin-ei ?*
Par exemple, la représentation du point d'intersection de la droite et du plan, que la représentation de la droite soit à "l'extérieur" du parallélogramme représentant le plan (fig. 66) ou non et pourvu qu'elle existe, permet d'élargir le domaine de fonctionnement du dessin-ei.

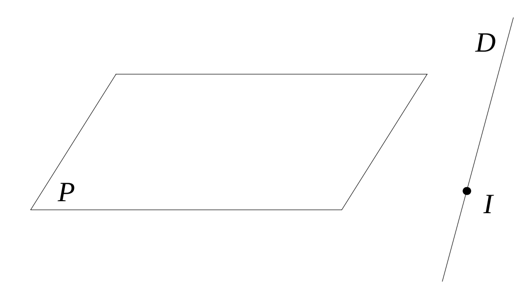


fig. 66

Q1.c - *Comment sont représentés les objets de base ou construits à l'aide des primitives ? en particulier, la représentation utilise-t-elle des pointillés pour les parties cachées ?*
Par exemple, les parties cachées d'une représentation de section plane d'un solide avec un plan, peuvent être représentées ou non par des pointillés.

Un autre exemple est la représentation d'un plan parallèle à un plan donné et passant par un point donné. Est-il représenté par un parallélogramme à bords parallèles au premiers, c'est-à-dire selon la représentation-type ?.

Q1.d - *Peut-on visualiser un plan particulier en vraie grandeur ?*
Cette possibilité permet de visualiser les objets d'un plan donné en vraie grandeur.
2. Eléments dépendants de la manipulation directe et des choix de représentation (fig. 65, (1))

Q2.a - *La représentation des parties cachées par des pointillés est-elle gérée en temps réel par l'environnement informatique lors du déplacement*. ?
Par exemple, lors dans son déplacement une droite "rencontre" un parallélogramme, représentant un plan, y a-t-il apparition des pointillés si la droite est sécante au plan et sans que le point d'intersection ne soit défini ?

Q2.b - *Les propriétés géométriques sont elles conservées par la manipulation directe* ?

Rétroactions par des messages

Les messages envoyés par l'environnement sont des réponses à des actions au niveau des primitives géométriques (fig. 65, (3)). Le contenu de ces messages est susceptible d'élargir le champ d'interprétation du dessin-ei.

Q3 - *Quels les types de messages, relatifs au contenu, envoyés par l'environnement ?*

2. ETUDE D'UN LOGICIEL : GEOESPACE

Ce logiciel a été développé par le CREEM[2], groupe d'enseignant travaillant au sein du CNAM[3], dans le cadre des actions d'innovation pilotées par la Direction des Lycée et Collèges. Ainsi, de 1990 à 1992 une large publicité et diffusion, a été faite par le ministère, d'un ensemble "Aactivités mathématiques avec Imagiciels" pour les classes du lycée. Deux logiciels "GEOPLAN" pour la géométrie plane et "GEOESPACE" pour la géométrie dans l'espace ont été développés par le CREEM pour créer ces Imagiciels.

2 Centre de Recherches et d'Expérimentation pour l'Enseignement des Mathématiques du CNAM.
CREEM, CNAM, 292, rue Saint-Martin, F 75141 Paris Cedex 03.
3 Conservatoire National des Arts et Métiers

De plus, un ouvrage a été édité par le CREEM, pour la classe de seconde conforme au programme en vigueur de la rentrée 90.
Ces éléments nous ont amené à choisir le logiciel “GEOESPACE” pour notre étude.

2.1. Présentation du logiciel[4]

“Ce logiciel permet la construction de figures de l'espace constituées de points, de segments et de droites. Il en montre des représentations en perspective. Il donne en outre la possibilité d'observer des lieux géométriques"[5].
Le logiciel propose deux types de "figures" : "figures de base" et "figures déjà crées". Les "figures de base" sont connues du logiciel, et elles “sont surtout utiles comme support à des constructions; le cube, les tétraèdres, les plans ... d'autres sont intéressantes pour elles mêmes”[6]. Les "figures déjà créées" correspondent à celles créées et enregistrées par l'utilisateur.
Pour travailler sur des objets géométriques, qui ne sont pas des solides géométriques, l'environnement propose trois figures de base : "plan", "deux plans parallèles" et "deux plans sécants". Le logiciel propose des "solides" en tant que figures de base comme : cube, tétraèdre, tétraèdre régulier, prisme, cuboctaèdre, ...

Nous proposons dans le tableau ci-dessous quelques caractéristiques des possibilités offertes par Geospace au dessin-ei.

Possibilités	**Caractéristiques**
Manipulation directe	Il permet de déplacer des points définis comme "mobiles" selon des directions verticales, horizontales sur l'écran ou en profondeur par des pas constants. Ces déplacements ne sont pas continus. Les propriétés géométriques sont conservées. Le dessin-ei à l'écran peut être déplacé entièrement par des translations (selon des directions verticales, horizontales ou en profondeur définies par les flèches du clavier) ou des rotations

4 Nous nous sommes basés sur la brochure de l'utilisation du logiciel pour sa présentation : "Activités mathématiques avec Imagiciels, Premières et Terminales, Géométrie dans l'espace", 1992, édité par le C.R.D.P de Poitou-Charentes.
5 ibid. p. 7
6 ibid. p.15

	axiales.	
Traitement graphique	- Couleur : permet de modifier la couleur des points, des segments et des droites. - Apparence d'un solide : un dessin-ei représentant un solide géométrique, peut être représenté soit en mode "fil de fer", "transparent" ou "opaque". - Apparence d'un point : il peut être représenté par une marque et / ou une lettre, ou caché. - Apparence d'un segment ou d'une droite : trois possibilités sont offertes : "Non dessiné" (caché), "Continu" ou "Tireté" (tracé discontinu de petits segments[7]).	
Changement de perspective	Passer d'une perspective orthogonale à une perspective oblique.	
Visualiser un plan particulier	Le logiciel offre deux possibilités : - "Examen d'un plan" : le logiciel met le plan choisi en position de "face". Seuls les objets de ce plan sont représentés. Tous ces objets sont représentés en "vraie grandeur. - "Avoir un plan de face" : le dessin-ei est placé de sorte que le plan choisi soit de face (c'est-à-dire parallèle au plan de projection). On voit l'ensemble des objets représentés.	
Types de message	<u>Action du sujet</u>	<u>Message</u>[8]
	- droite passant par un point A et perpendiculaire à une droite donnée D.	Si A est un point de D alors : M *: "Le point est sur la droite*"
	- intersection de deux droites.	Si le point n'existe pas alors : - M : "*Les droites ne sont pas coplanaires*". - M : "*Droites parallèles*"
	- intersection de deux plans	Si l'intersection n'existe pas alors : - M : "*Ces plans sont parallèles*"
	- intersection d'une droite et d'un plan	Si le point n'existe pas alors : - M : "*Ils sont parallèles*"

Tableau 44

7 Il faut distinguer "Tireté" du "pointillé", qui est réservé à la représentation des parties cachées.

8 Nous désignerons les messages par M

Le logiciel propose les primitives suivantes[9] :

POINT	LIGNE	PLAN
Point Repéré *Intersection* *Milieu* *Centre de gravité* *Orthocentre* *Barycentre* *Transformés*	*Segments* *Droite (2 points)* *Parallèle* *Perpendiculaire à plan* *Perpendiculaire à droite* *Intersection de plans* *Bissectrice*	*Parallèle à plan* *Perpendiculaire à droite* *Défini par droite et point* *Parallèle à deux droites* *Médiateur*

Tableau 45

2.2. Fonction d'expérimentation d'un dessin-ei dans le cas de Geospace

Nous proposons d'étudier cette fonction par rapport aux deux types de rétroactions : perceptives et par des messages.

Rétroactions perceptives

<u>1. Eléments dépendants des primitives géométriques et des choix de représentation (fig. 65, (2)).</u>

Q1.a - *Quels sont les objets de base qui sont représentés ?*
Toutes les figures de base sont représentées dans une position donnée.

Q1.b - *Un objet défini à partir des primitives géométriques est-il représenté sur le dessin-ei ?*
Les points et les droites définis à partir des primitives sont représentés. En revanche, les plans définis à partir des primitives ("Plan parallèle à plan" , "Plan perpendiculaire à droite")[10] ne sont jamais représentés.
Ce choix des auteurs peut s'expliquer par la difficulté de choisir un parallélogramme représentant le plan. L'absence de matérialisation du plan ne favorise pas l'appréhension perceptive et réduit le domaine de fonctionnement du dessin-ei.

Q1.c - *Comment sont représentés les objets de base ou construits à l'aide des primitives ? en particulier, la représentation utilise-t-elle des pointillés pour les parties cachées ?*
Nous examinons d'abord le cas des figures de base relatives au plan et le cas d'un solide usuel comme le cube et ensuite les objets pouvant être construits à l'aide des primitives.

9 cf. Annexe D1.a : Résumé des possibilités de création du logiciel GEOSPACE.
10 cf. Annexe D1.a : Résumé des possibilités de création du logiciel GEOSPACE.

Figure de base "Plan"

Le plan est représenté par un parallélogramme (fig. 67), comme dans les manuels. Seulement, les sommets sont désignés par des lettres et les côtés sont considérés comme des objets de l'espace. Cela ne correspond pas à l'usage des manuels, et on peut se demander si ce choix ne favorise pas davantage l'association du plan au parallélogramme que dans l'environnement papier-crayon.

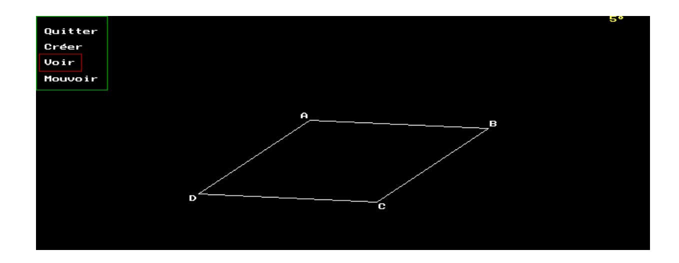


fig. 67

Figure de base "deux Plans parallèles"

Les auteurs ont représenté deux plans parallèles par des parallélogrammes dont les côtés sont parallèles deux à deux. Il s'agit de la représentation-type Ppp (cf. Chapitre A, 5.2.2).

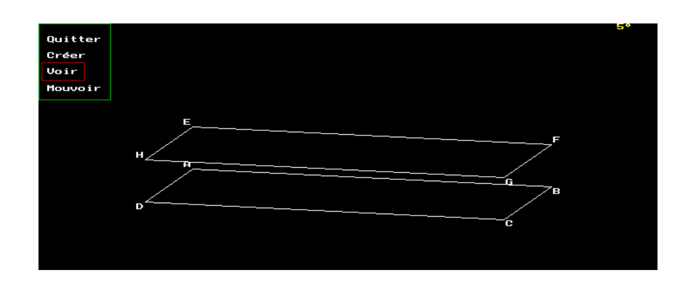


fig. 68

Figure de base "Deux Plans sécants"

De même, les plans sécants sont représentés par des parallélogrammes selon la représentation type Pps (cf. Chapitre A, 5.2.2). Les parties cachées sont représentées en pointillées.

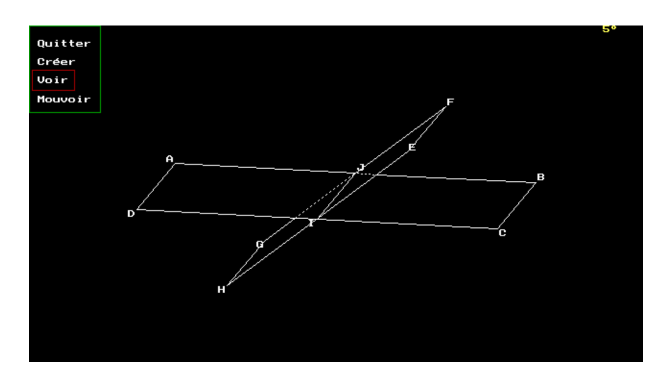


fig. 69

Figure de base "Cube"

Les sommets du cube sont désignés. Les arêtes cachées sont en pointillées.

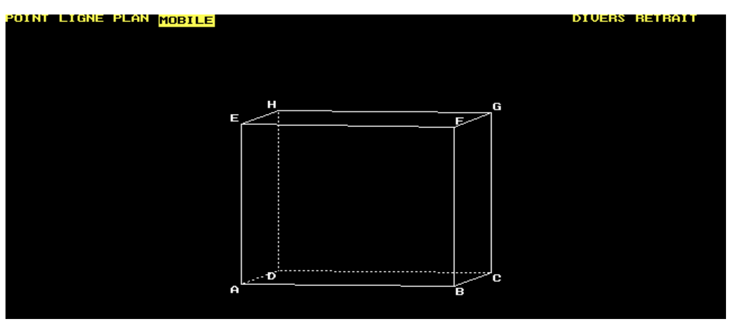


fig. 70

En dehors des figures de base, l'environnement ne gère pas l'aspect des objets : l'opacité et les pointillés pour les parties cachées par des objets. Par exemple, si on construit un tétraèdre à partir des points "mobiles", aucune arête, n'est représentée en pointillé, de même une droite sécante avec une des faces est représentée en continu. Il y a deux gestions différentes des aspects des objets, selon leur définition par rapport au logiciel. Cela réduit en conséquence les domaines de fonctionnement et d'interprétation du dessin-ei.

Q1.d - *Peut-on visualiser un plan particulier en vraie grandeur ?*

Le logiciel offre deux possibilités : "Examen d'un plan" et "Avoir un plan de face" (cf. Tableau 44, p.272). Ces possibilités peuvent élargir le domaine d'interprétation.

2. Eléments dépendant de la manipulation directe et des choix de représentation (fig. 65, (1)).

Seules les points mobiles peuvent être déplacés (cf. Tableau 44, p.272). Pour les figures de base, on peut leur faire subir des rotations axiales[11].

[11] cf. Annexe D1.a : le mode "Voir"

Q2.a - *La représentation des parties cachées par des pointillés est-elle gérée par l'environnement informatique lors du déplacement*. ?

Cette question concerne seulement le cas des figures de base, étant donné que c'est le seul cas où le logiciel gère les parties cachées. Par rapport au mode de déplacement proposé, à savoir des rotations, les parties cachées sont gérées.

Considérons une figure de base et une droite construite à l'aide des primitives, par exemple à partir de deux points mobiles. En déplaçant la droite par l'un des points mobiles, les parties cachées sont gérées par l'environnement. Par exemple, soient un cube ABCDEFGH de base, deux points mobiles I et J, et Δ la droite (IJ). En déplaçant l'un des points I et J, l'environnement gère les parties cachées. Cela permet d'élargir le domaine de fonctionnement et d'interprétation du dessin mais seulement lorsqu'on travaille avec des objets de base.

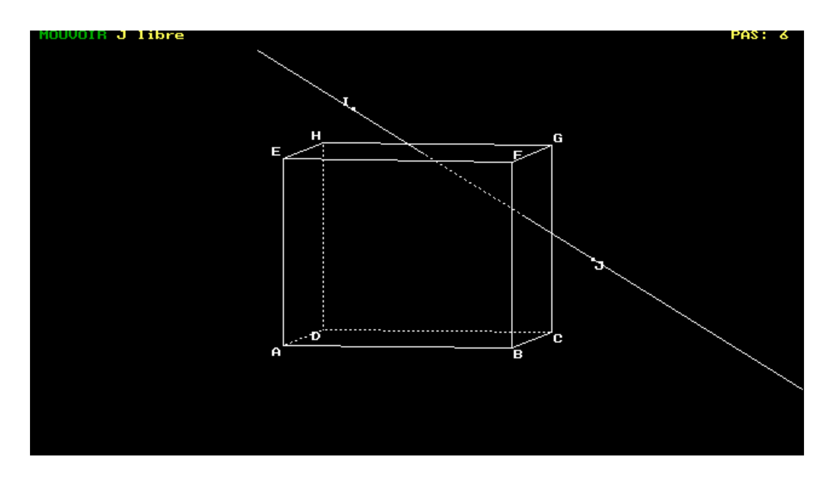


fig. 71

Q2.b - *Les propriétés géométriques sont elles conservées par la manipulation directe* ?

Toutes les propriétés géométriques obtenues à partir des primitives, sont conservées par le déplacement.

<u>Rétroactions par des messages</u>

Q3 - *Quelles sont les types de messages, relatifs au contenu, envoyés par l'environnement ?*

Nous avons présenté dans "Tableau 44" les types de messages pouvant être envoyés par le logiciel suite à des actions de l'utilisateur. Ces messages permettent de disqualifier des interprétations illicites du dessin. Les auteurs ont souligné ce point dans le chapitre "intersection" de la brochure. Et plus précisément à propos de la construction d'un point

comme intersection de deux droites. Celle-ci n'est acceptée par le logiciel que si les droites sont coplanaires. De plus, si les droites ne sont pas coplanaires, le logiciel envoi un message : "*les droites ne sont pas coplanaires*". Les auteurs suggèrent aux enseignants de transmettre à l'élève d'utiliser le mode “Voir” pour positionner la figure de façon à bien comprendre pourquoi la construction qu'il avait demandée est refusée par la machine”[12]. Les auteurs font référence à une "faute" commise par les élèves : “La faute bloquante rencontrée dans le travail sur papier, consistant à utiliser le point d'intersection de deux droites qui se coupent sur la représentation mais qui ne sont pas coplanaires dans l'espace”[13]. Nous avons mis en évidence ce que les auteurs déclarent comme "faute", et appelé règle d'interprétation d'un dessin par les élèves dans le chapitre B. En effet, dans les exercices mettant en jeu des solides sur lesquels porte notre étude, les élèves concluaient que deux droites étaient sécantes sans vérifier si elles étaient coplanaires. En fait, nous avons mis en évidence que cette règle d'interprétation n'est pas une simple lecture d'une relation spatiale sur la représentation mais qu'elle est justifiée par un théorème en acte selon lequel : *Si deux droites sont incluses respectivement dans deux plans sécants, alors elles sont sécantes.*
Autrement dit, le logiciel offre par ses rétroactions des possibilités susceptibles de disqualifier l'interprétation "droite-sec-droite"[14].

Nous proposons d'examiner les moyens de contrôle relatifs aux positions de deux droites dans l'espace, offerts par le logiciel.

2.2.1. Etude d'un cas : positions relatives de deux droites dans l'espace

Soient deux droites D1 et D2 dans l'espace et d1, d2 leurs représentations respectives dans Geospace.
Si d1 et d2 sont sécantes, on sait que les droites D1 et D2 ne sont pas parallèles. Il reste à savoir si elles sont sécantes. Pour illustrer les moyens de contrôles possibles, nous considérons le cas où les deux droites sont des incluses dans deux plans définis à partir des figures de base.
Par exemple, soit ABCD un tétraèdre et D1= (IJ) une droite du plan (ACD), D2=(LK) une droite du plan (ABD). (fig. 72).

---

12 Brochure "Geospace", p. 48.
13 ibid.
14 cf. Chapitre B, p.76

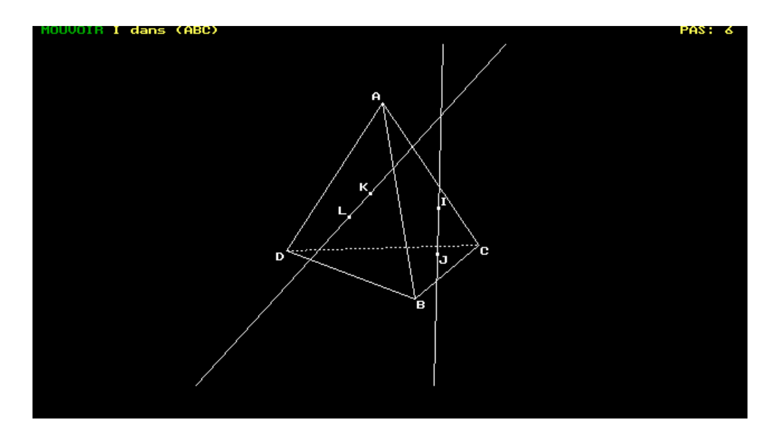


fig. 72

- Par déplacement, on fait tourner l'objet. Si, au voisinage de l'intersection une représentation reste en "continu" alors que l'autre représentation est en "pointillé", alors les droites D1 et D2 ne sont pas coplanaires (fig. 73). Si les deux représentations sont en continu alors on ne peut rien déduire.

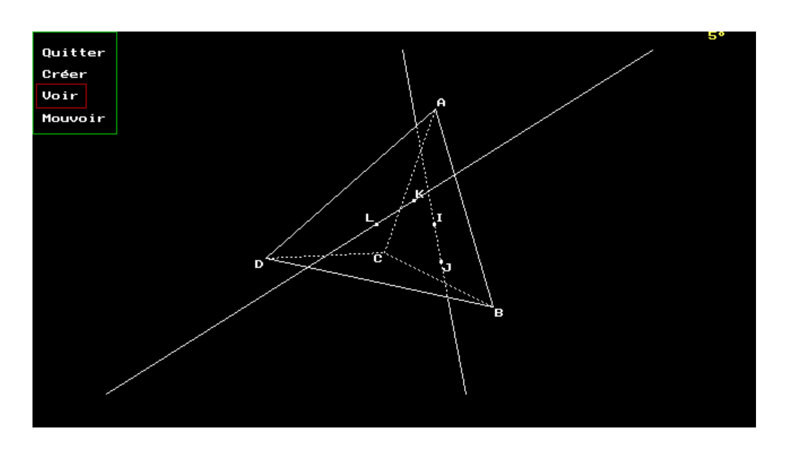


fig. 73

- De même, si dans une position d1 et d2 sont parallèles, alors D1 et D2 ne sont pas sécantes.

- On peut demander l'examen de l'objet par le choix "*Position particulière*". Le logiciel détermine la position de l'objet de façon à ce que le plan choisi soit de face ou de façon à ce que deux droites choisies soient de face. Pour étudier l'orthogonalité de deux droites non coplanaires dans l'espace, on peut demander la représentation de l'objet dans une position particulière de façon à ce que les deux droites d1 et d2 soient de face.

- Par les primitives géométriques, on demande la construction de l'intersection des deux droites. Si elle ne sont pas sécantes, le logiciel envoie un message : "*les droites ne sont pas coplanaires*"

Si les droites D1 et D2 ne sont pas dans deux plans définis à partir des figures de base, alors le logiciel ne gère pas l'aspect pointillé, et donc on ne peut rien dire.

2.2.2. Moyens de contrôle de lecture d'un dessin-ei

L'exemple précédent montre les possibilités et les limites des rétroactions du logiciel Geospace pour la lecture et l'interprétation d'un dessin-ei. Nous distinguons deux catégories de moyens : recours au déplacement et recours aux primitives géométriques.

a) Recours au déplacement

Il s'agit de déplacer l'objet et d'étudier l'aspect des objets (en pointillé / en continu). Comme Geospace ne gère pas l'aspect des objets pour des objets qui n'ont pas été définis à partir des figures de base, le recours au déplacement ne peut être efficace que dans ce cas.

Dans les déplacements nous considérons aussi les possibilités :

- "*Examen d'un plan* " : essentiellement pour étudier des objets appartenant à un même plan,
- "*Position particulière* " : par exemple pour étudier l'orthogonalité de deux droites non coplanaires. Soit un tétraèdre régulier ABCD (obtenu comme figure de base : fig. 74).

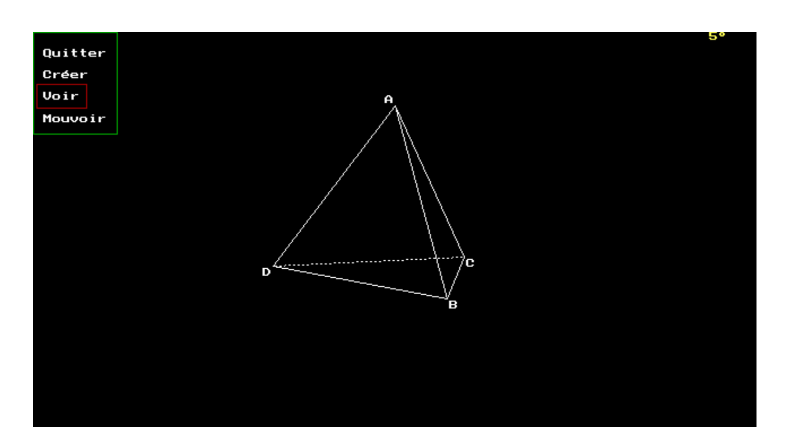


fig. 74

On demande "*Position particulière* " en choisissant les droites (AD) et (BD) de face, leurs représentations sont perpendiculaires (fig. 75)

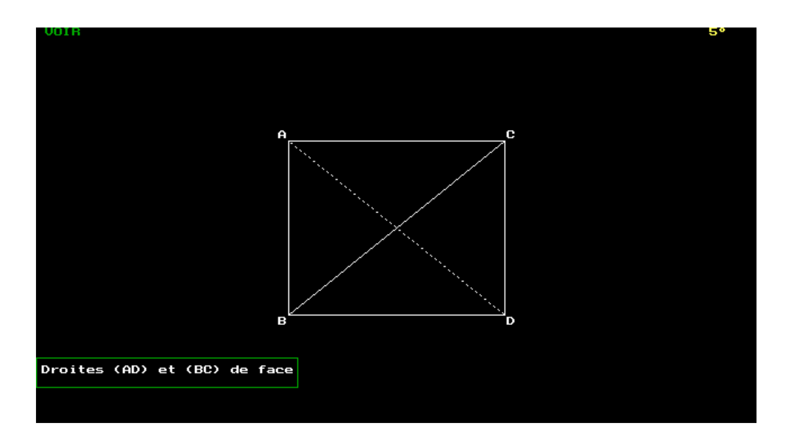


fig. 75

Les rétroactions du milieu sont perceptives.

b) Recours aux primitives géométriques

Pour étudier si une relation R entre deux objets O_1 et O_2 est vraie (on note O_1 R O_2 pour désigner que la relation est vraie), on exécute une construction à l'aide des primitives géométriques offertes par le logiciel de sorte que l'on puisse déduire des informations à propos de ces deux objets. Deux voies sont possibles :

- Si la validité de la relation R entre les deux objets est équivalente ou entraîne l'existence d'un objet O_3, alors on étudie l'existence de O_3. Plus précisément : si " O_1 R $O_2 \Leftrightarrow O_3$ ", l'existence de O_3 permet de conclure. Par exemple, D1 et D2 sont sécantes si et seulement si leur intersection existe.
- On construit un objet O_3 ayant la relation R avec O_1, et on vérifie par déplacement si O_2 et O_3 sont confondus. Par exemple, pour vérifier si un point M est le milieu d'un segment [AB], on construit par les primitives le milieu I de [AB] et on vérifie par déplacement que I et M sont confondus.

2.3. Etude de la vie des problèmes de construction dans Geospace

Nous proposons dans ce paragraphe, d'étudier la vie des problèmes de construction dans l'environnement Geospace à partir des primitives géométriques disponibles, de ce que le logiciel rend visible au niveau de la représentation, et des rétroactions possibles du logiciel. Cela nous permettra d'identifier les types de problèmes de construction qui peuvent vivre dans l'environnement et d'étudier le champ d'expérimentation du dessin dans ces problèmes.

2.3.1. Les primitives de GEOSPACE

Pour la primitive "Point : intersection", le logiciel propose deux choix : "intersection d'une droite avec un plan" et "intersection de deux droites". A ces primitives, il faut

ajouter la primitive "intersection de deux plans". Ces primitives permettent de résoudre des problèmes qui sont des problèmes de construction évoquée, dans l'environnement papier-crayon, sans le bénéfice de règles d'usage utilisant des arbitraires ou d'avoir recours aux algorithmes de construction selon les schémas (fig. 48 à 50). Autrement dit, les problèmes de construction effective et évoquée dans l'environnement "papier-crayon", peuvent vivre dans l'environnement "Geospace" avec les mêmes exigences au niveau de l'algorithme de construction par l'utilisation des primitives et donc selon le même contrat didactique. Donc, tous les problèmes de construction sont des problèmes de construction effective dans l'environnement Géospace.

La possibilité de construire des plans ou des droites orthogonaux à une droite ou à un plan permet la vie d'autres problèmes de construction. C'est l'un des exemples proposé dans la brochure du logiciel[15] : "construire une perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires".

Les primitives géométriques disponibles vont donc permettre à d'autres problèmes de construction de vivre. De la même façon, on peut se demander si des problèmes de construction ne peuvent plus vivre dans l'environnement Geospace. En effet, la recherche de section plane d'un plan avec un solide, par exemple, n'est plus un problème géométrique en soi dans la mesure où le logiciel permet de construire l'intersection de deux plans.
A cet effet, l'ensemble "Imagiciel"[16] propose un logiciel "INTERSEC" d'exercices de construction dans l'espace.

2.3.2. Le logiciel "INTERSEC"

Ce logiciel propose 33 exercices autour des problèmes de construction. Par rapport à la classification des problèmes de construction "papier-crayon" étudiée dans le chapitre C2, tous les exercices proposés sont des problèmes de construction effective, avec solide, dont la tâche est de construire l'intersection de deux objets (PCef-AS-intersect). Il s'agit du même type de problème de construction proposé dans les manuels actuels. Or, comme nous l'avons dit plus haut, ces exercices n'ont plus "d'intérêt" si le logiciel permet de construire l'intersection de deux plans. Pour cela, le logiciel "INTERSEC" propose un menu réduit par rapport à celui de Geospace.

---

15 "Activités mathématiques avec Imagiciels, Premières et Terminales, Géométrie dans l'espace", 1992, édité par le C.R.D.P de Poitou-Charentes. p. 38
16 Un ensemble de logiciels : Geospace et d'autres logiciels issues de Geospace.

POINT	LIGNE
Intersection de deux droites *Sur une droite* *Sur un segment*	*Segment* *Droite (2 points)* *Parallèle*

Ce menu permet aux problèmes de construction de vivre comme dans l'environnement papier-crayon aux niveau de l'algorithme de construction.
Cette restriction du menu a été explicitée par les auteurs[17] du logiciels :

> “L'utilisateur doit effectuer la construction demandée, comme il le ferait sur papier, en utilisant les constructions élémentaires prévues par le logiciel...
> Le logiciel exécute à la demande un certain nombre, **volontairement limité**, de constructions élémentaires :
> - on ne peut définir une droite que par deux points ou par un point et une direction,
> - un point ne peut être défini que comme intersection de droites, mais on peut aussi choisir un point (mobile) sur une droite ou un segment.
>
> ...
> Le logiciel GEOSPACE dont (INTERSEC est issu) permet un plus grand nombre de constructions, supprimées ici en raison des objectifs fixés. Par exemple, on peut définir un point comme intersection d'une droite et d'un plan, ou une droite comme intersection de deux plans. Dans un exercice dont le but est de construire l'intersection de deux plans, ou celle d'une droite et d'un plan, il a fallu évidement supprimer ces possibilités.”

Donc en modifiant le menu du logiciel GEOSPACE, les problèmes du type PCef-AS-intersect peuvent vivre dans l'environnement, selon les mêmes objectifs fixés par l'institution.

2.4. Etude du manuel "Imagiciel - Seconde"

Nous proposons dans ce paragraphe d’étudier le manuel "Imagiciel - seconde" pour la classe de Seconde. Le manuel s'inscrit dans l'esprit des programmes de Seconde de 1990 en proposant des activités avec des logiciels "Imagiciels" issus du logiciel Geospace. Nous cherchons à comparer la partie cours et la partie exercices de ce manuel par rapport à un manuel "classique". Pour les exercices, nous nous intéresserons plus précisément aux types de problèmes de construction proposés.

2.4.1. Partie cours

17 Brochure "Geospace" p.45

Dans cette partie sont proposés des activités préparatoires, des propriétés géométriques, des exemples et des exercices d'application. L'utilisation des logiciels est sollicitée pour plusieurs exercices et activités.

Une première différence avec les manuels classiques est l'importance qu'accordent les auteurs au problème des figures dans l'espace. Après une présentation rapide de trois modes de représentation : géométrie descriptive, perspective conique et perspective cavalière, les auteurs argumentent le choix de la perspective cavalière comme mode de représentation en mathématiques par l'une des fonctions de la figure à savoir, aide au raisonnement.

> "En mathématiques, la figure est utilisée en tant qu'aide au raisonnement ; c'est pourquoi la perspective cavalière (en représentant des droites parallèles par des droites parallèles) est essentiellement utilisée." (Mathématiques avec Images Logiciels, p.228)

Ensuite, ils proposent une activité avec l'Imagiciel POLYBG[18], pour conjecturer deux propriétés de la perspective cavalière, la conservation du parallélisme et la conservation du barycentre, en particulier le milieu.

De même, les auteurs présentent deux conventions de la perspective cavalière, permettant la représentation des objets de l'espace :
- La représentation d'un plan par un parallélogramme : les auteurs présentent cette convention comme étant la traduction en perspective cavalière d'une portion du plan délimitée par un rectangle.
- Les parties cachées sont représentées en pointillés : les plans sont supposés opaques.

Enfin, les auteurs évoquent le problème de la lecture du dessin en géométrie dans l'espace :

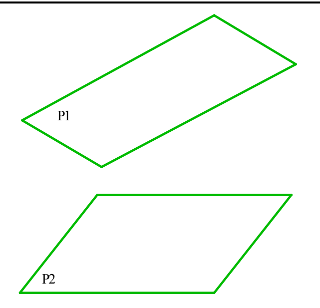
> "En conclusion, un dessin en géométrie dans l'espace est porteur d'ambiguïté ; pour justifier un résultat il va falloir le déduire logiquement de propriétés connues en l'illustrant, au besoin, par une figure dont il importe qu'elle soit ***légendée***." (Mathématiques avec Images Logiciels, p.230)

A titre d'exemple, ils considèrent le problème de la représentation-type de deux plans parallèles.

---

18 Ce logiciel fait partie du fichier ESPACE. Il permet la représentation de polyèdres en perspective cavalière.

On essaie, en général, de représenter des plans parallèles par des parallélogrammes aux côtés parallèles deux à deux mais, en absence de légende on ne peut rien dire.



(Mathématiques avec Images Logiciels, p.232)

Ce passage montre bien qu'on utilise des représentations-types pour illustrer des relations géométriques, mais au niveau de la lecture rien ne va de soi sans des indications sous forme d'une légende.

En conclusion, nous retenons que les auteurs ont explicité, davantage que dans les cas des manuels classiques, le problème de la représentation des objets dans l'espace. Nous l'expliquons par une hypothèse de travail :

Parce que ces auteurs ont développé ces logiciels, ils étaient confronté eux-mêmes aux problèmes de représentation des objets de l'espace au sens où des choix ont dus être effectués pour le mode de représentation, les conventions de représentations, les représentations-types, etc. De plus, ces éléments devraient être implémentés et gérés par l'environnement.

Cependant, les remarques des auteurs sur le problème de représentation dans l'espace sont relatives au papier crayon. Autrement dit, elles sont relatives au dessin en tant que modèle d'objets géométriques de l'espace sur papier crayon, et non comme modèle d'un environnement informatique des objets de l'espace

2.4.2. Partie exercices

Une note des auteurs, au début de la partie "exercices", précise la signification de l'expression “construire” :

> ***Avertissement***
> Dans les exercices qui suivent, l'expression “construire” signifie définir, à l'aide d'étapes successives, l'objet considéré (droite, plan, cube, ...) de telle sorte que celui-ci puisse être matérialisé dans l'espace.
> (Mathématiques avec Images Logiciels, p.247)

C'est le seul manuel, à notre connaissance, qui a explicité la notion de construction dans l'espace.
Nous nous sommes limités dans l'analyse des exercices aux problèmes de construction, représentation et d'incidence. Nous avons adopté la même grille de lecture que celle utilisée pour l'analyse des manuels "classiques" dans le chapitre C2.

Seconde (1990)	Manuels classiques[19]	Manuel Images-logicielles
Représentation	10	10
PCev - AS - Obj/cond	0	0
PCev - AS - intersect	0	0
PCev - SS - Obj/cond	0	4
PCev - SS - intersect	0	0
PCef - AS - Obj/cond	0	0
Pcef - AS - intersect	16	5
Pcef - SS - Obj/cond	0	1
Pcef - SS - intersect	3	0
Incidence sans constr	17	6
Total	**46**	**28**

Nous constatons que des problèmes de construction évoquée sont proposés (presque autant de problèmes de construction effective que de construction évoquée). Cela montre que les deux types de problèmes peuvent coexister dans l'environnement informatique Geospace. En effet, nous pensons que les primitives offertes par l'environnement Geospace (2.3.1) permettent aux deux types de problèmes de vivre selon le même contrat didactique.

2.5. Conclusion

L'analyse précédente montre que des possibilités offertes par l'environnement Geospace permettent d'élargir le champ d'expérimentation du dessin-ei par rapport au dessin papier-crayon. En particulier, la possibilité de se placer dans un plan donné et les types de messages envoyés par l'environnement suite à des actions du sujet. Cependant, certains choix des concepteurs peuvent favoriser des conceptions erronées et réduire les domaines de fonctionnement et d'interprétation du dessin-ei. En effet :

19 Les chiffres de cette colonne correspondent à une moyenne des trois manuels examinés pour les éditions 1991. Cf. Tableau 33, p.199

- la représentation du plan, en tant que figure de base, avec désignation des sommets et de dimensions fixées, peut favoriser davantage l'association du plan au parallélogramme que dans l'environnement papier-crayon;
- les objets "figures de base" et "figures construites à partir des primitives" ne sont pas gérés de la même façon. Ainsi, dans le cas où il n'y a pas de "figures de base, le domaine de fonctionnement se trouve plus réduit que dans l'environnement "papier-crayon";
- la manipulation des "figures de base" est limitée à des rotations, car aucun point de la figure n'est "mobile". Cela limite les possibilités que peut offrir la manipulation directe quant au domaine d'interprétation.

Les primitives géométriques disponibles permettent aux problèmes de construction effective et évoquée de vivre dans l'environnement "Geospace", comme le montre l'étude du manuel "Imagiciel-Seconde".

3. LE LOGICIEL : CABRI-3D

Il s'agit d'un prototype de Cabri-3D pour la géométrie dans l'espace. Dans ce paragraphe nous ne proposons pas la même analyse de ce logiciel que Geospace. Mais un début de questionnement sur les choix déjà effectués dans le prototype actuel, pour montrer que les choix du concepteur doivent être le produit d'une réflexion et d'un travail, en particulier pour le problème de représentation des objets de l'espace.

3.1. Présentation du prototype

Cabri-3D est un environnement informatique pour la géométrie dans l'espace développé[20] au sein de l'équipe EIAH[21] à Grenoble. Sa conception s'inscrit dans la philosophie du logiciel Cabri II[22]. En particulier, par l'importance accordée à la manipulation directe et à un choix de menus le plus large possible.
Pour la conception du logiciel, l'auteur a été confronté à des choix relatifs à l'interface. Notons que ces questions sont toujours d'actualité et que chacune d'elles nécessite une étude didactique spécifique. Notre travail peut être une première contribution à cette étude.
Tout d'abord, présentons l'environnement dans son état actuel.

---

20 Ce logiciel est développé dans le cadre d'une recherche menée par S. Qasem.
21 "Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain" : équipe de recherche au sein du laboratoire Leibniz, IMAG, université Joseph Fourier, Grenoble.
22 voir

Un repère orthonormé représenté est considéré comme une référence pour placer les objets (fig. 76). Chaque point étant repéré par ces coordonnées (x,y,z) dans ce repère. Ces coordonnées sont affichées dès que le point est saisi (fig. 77). De plus, un segment en pointillé est représenté indiquant la cote.

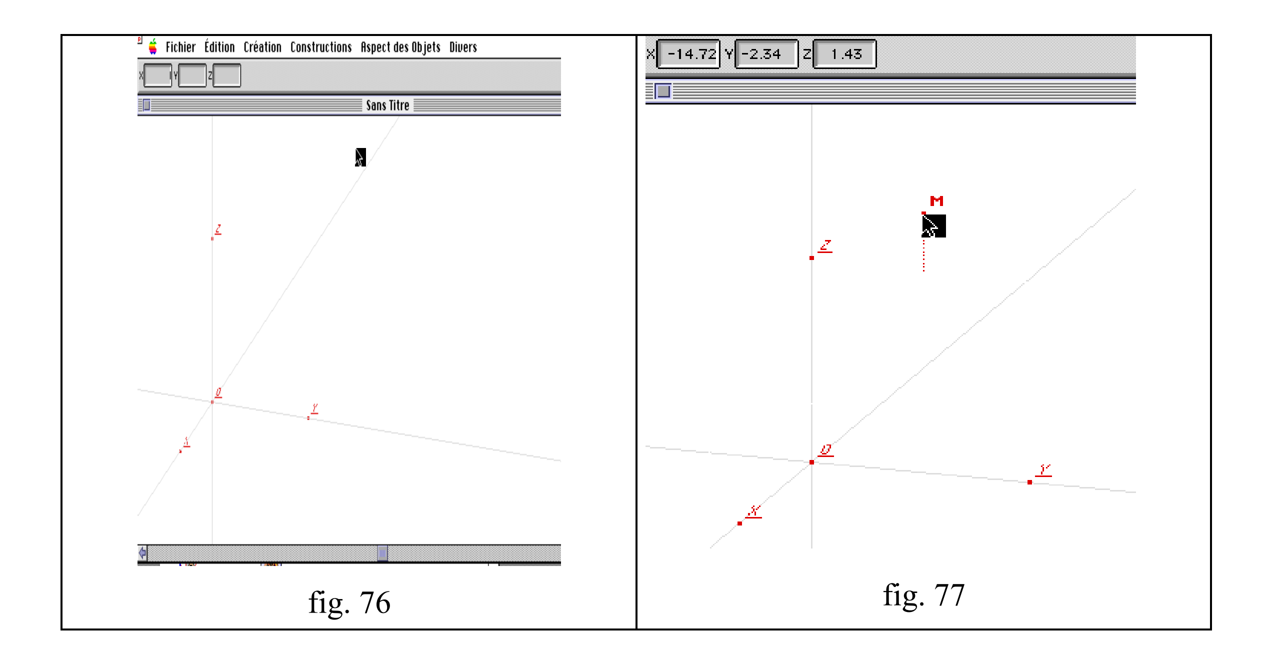


fig. 76
fig. 77

On peut créer des objets géométriques comme point, droite, segment ... (fig. 78). Ce sont les objets de base et ils peuvent être déplacés librement. Cet environnement permet de construire des objets à l'aide des primitives géométriques (fig. 79). A l'exception de "point sur objet", ces objets ne peuvent être déplacé directement puisqu'ils sont soumis à des contraintes géométriques.

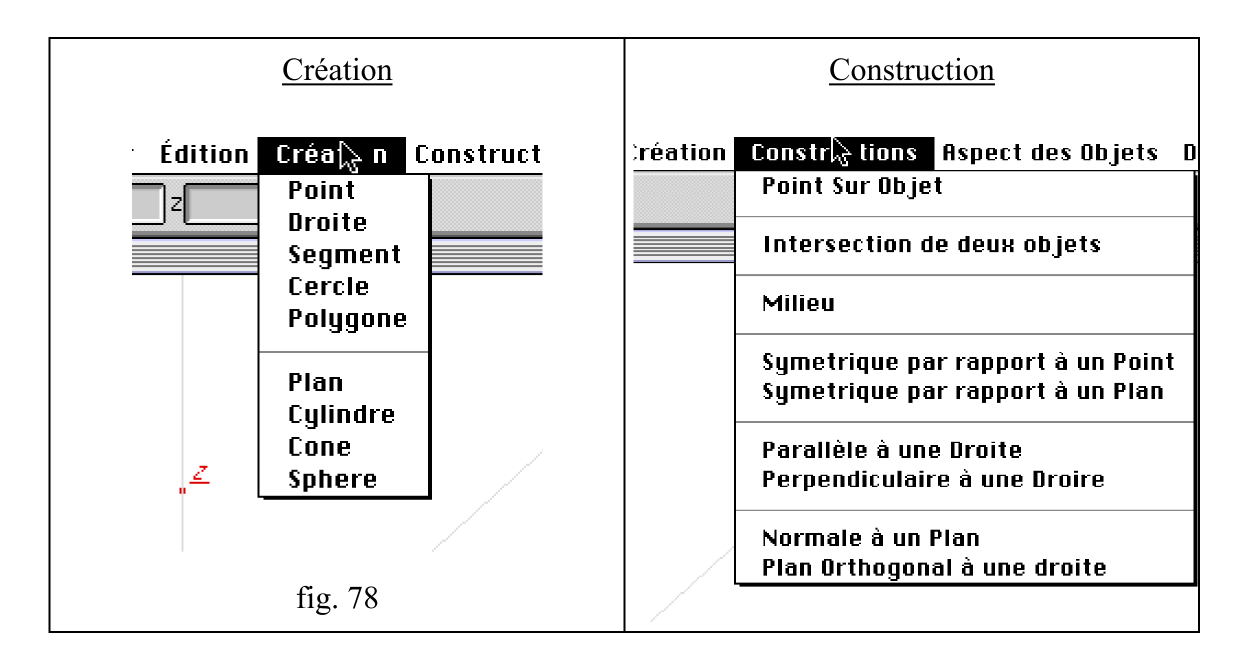


fig. 78

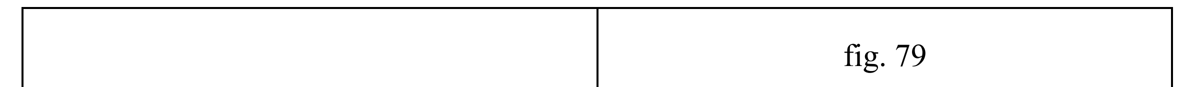


fig. 79

Le logiciel propose plusieurs aspects de représentation des objets. Par exemple, le plan peut être représenté avec une épaisseur (fig. 82), avec ombrage (fig. 82 et fig. 83), représentation simple (fig. 84) ou sous forme de parallélogramme ou triangle.

Aspect des objets	Divers
tions **Aspect des Objets** Divers Représentation des Points Représentation des Plans Faces Opaques Montrer/cacher ▶ Couleurs ▶ Plan Frontal Repère Standard	ts **Divers** Detruire un Objet Nommer les Objets Mesurer la Distance Redessiner Tout Effacer Tout
fig. 80	fig. 81

fig. 82

fig. 83

fig. 84

Tous les aspects des objets sont gérés par la manipulation directe que l'objet soit créé ou construit. Enfin, soulignons également l'importance des rétroactions par des messages suite à des actions du sujet.

3.2. Questions et suggestions

Les choix faits par l'auteur permettent d'élargir davantage le champ d'expérimentation du dessin-ei dans Cabri-3D que l'environnement Geospace. Cela peut se justifier au moins pour les raisons suivantes. L'importance des possibilités de manipulation directe

et la capacité de l'environnement à gérer les aspects des objets quelle que soit leur nature conduisent à des rétroactions perceptives plus importantes que dans Geospace.
A cela, il faut ajouter que les différents aspects de représentation, l'affichage des coordonnées d'un point, lors de sa saisie ou de son déplacement ..., peuvent contribuer à une bonne appréhension perceptive du dessin-ei. Une étude didactique à ce propos reste à faire.
Les choix des primitives permettent aux problèmes de construction effective et évoquée de vivre comme dans le cas de Geospace. Cependant, nous pensons que le choix des primitives doit être plus large pour permettre à plus de problèmes de vivre dans l'environnement Cabri-3D[23]. Par exemple, on peut envisager une primitive pour construire un plan Q parallèle à un plan P donné et passant par un point donné. Pour cet exemple une question se pose sur la représentation du plan Q. Doit-il être représenté selon la représentation-type Ppp (cf p.49) ? Quelle taille faut-il choisir ? ... etc.
Pour la représentation du plan, une question se pose sur le statut de l'épaisseur (fig. 85). Les raisons de ce choix sont liées à l'appréhension perceptive du dessin, puisque l'épaisseur, par l'inclinaison de la normale, et la représentation d'un segment indiquant la cote des trois points définissant le parallélogramme, donnent une "idée" sur la position du plan dans l'espace.

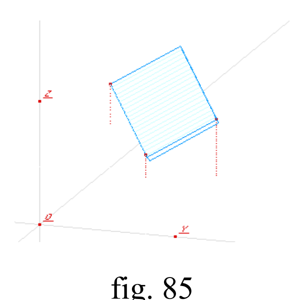


fig. 85

Cependant, on peut se demander si ce choix n'induit pas une conception erronée du plan. Pour cela, nous pensons que d'autres choix doivent être pris en considération. Par exemple :
- la partie de l'épaisseur ne doit pas être opaque comme le plan (fig. 86), mais transparente;

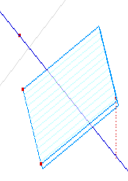


fig. 86

23 Sur ce point, il est prévu qu'il y ait plus de primitives que dans la version actuelle.

- si l'utilisateur a la possibilité de modifier l'épaisseur, comme c'est le cas actuel, nous pensons que cette modification ne doit pas dépasser un certain seuil à définir (fig. 87);

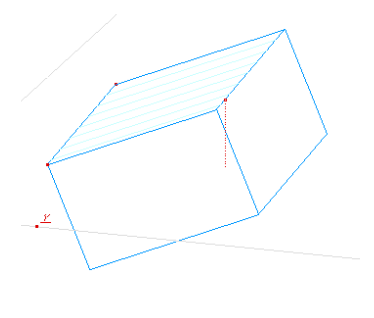


fig. 87

Les solides retenus dans la version actuelle sont : cylindre, cône et sphère. Les objets cylindre et cône sont des objets "infinis". Cette considération peut contribuer à l'étude de nouveaux problèmes. Nous pensons en particulier à l'introduction des coniques comme intersection d'un plan avec un cône.

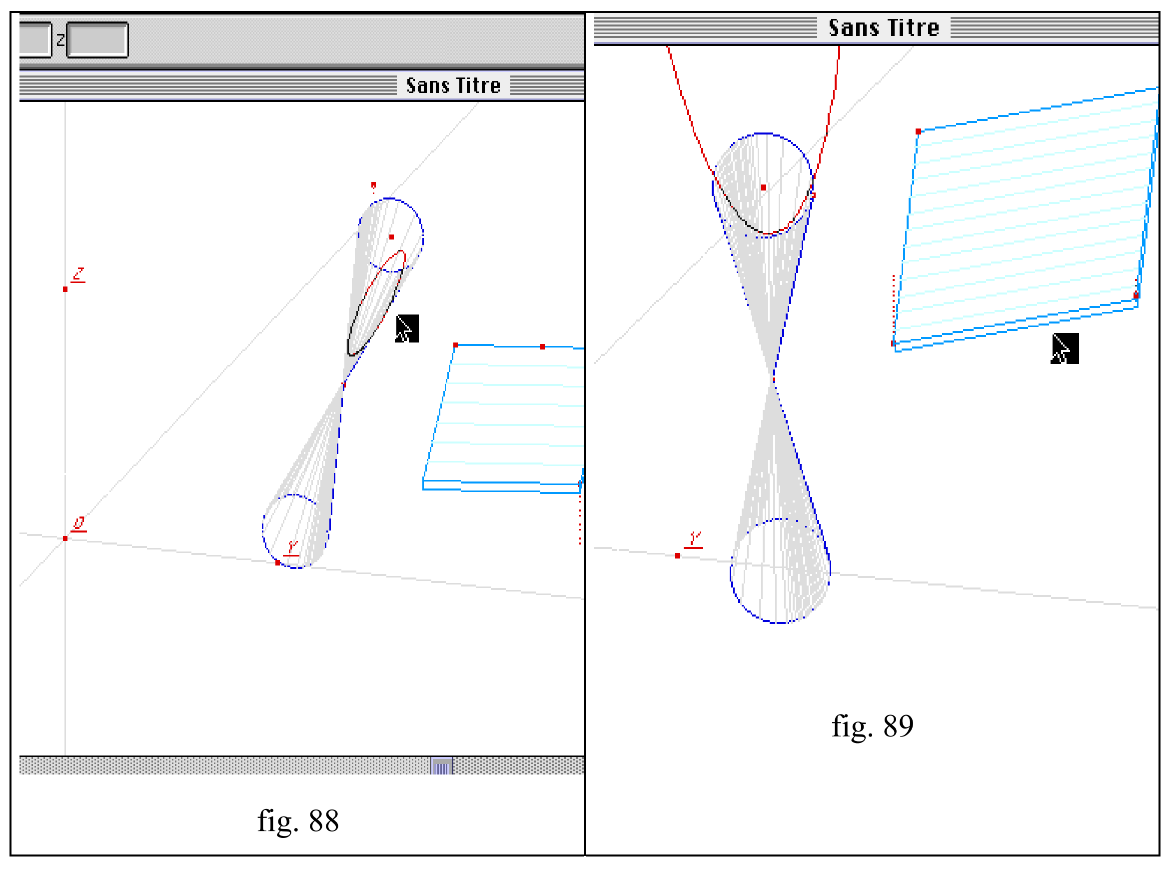


fig. 88

fig. 89

Dans l'enseignement actuel, les solides usuels sont des objets "finis". Faut-il donc considérer les deux types de solides ? Nous pensons que les deux types de solides doivent être présents dans l'environnement.

Enfin, il serait souhaitable d'avoir la possibilité de créer d'autres solides usuels comme "parallélépipède" et "cube".

Comme dans le cas de Geospace, tous les problèmes de construction sont des problèmes de effective dans l'environnement Cabri-3D du fait de l'existence des primitives géométriques. De plus, dans ce logiciel il est possible de déterminer l'intersection de deux objets construits à partir du menu comme l'intersection d'un cylindre et d'une sphère. Ces possibilités permettent à d'autres types de problèmes de construction de vivre dans l'environnement Cabri-3D.
Dans ce paragraphe, nous n'avons pu aborder que certains points relatifs aux choix de représentation et de primitives. Nous avons montré que ces questions nécessitent une étude didactique pour le prototype de Cabri-3D actuel.

4. CONCLUSION

Nous avons montré comment un environnement informatique peut élargir le champ d'expérimentation du dessin modèle d'un objet géométrique dans l'espace, pour les raisons suivantes :
- l'environnement donne des possibilités d'action par la manipulation directe et l'usage des primitives,
- les rétroactions de l'environnement, sont de deux types : perceptives et / ou par des messages.

Ces raisons sont valables aussi bien pour le cas du dessin modèle d'un objet géométrique du plan que de l'espace. Dans le cas de la géométrie dans l'espace l'apport des environnements informatiques pour le rôle du dessin dans les problèmes est cependant plus important que dans le cas de la géométrie plane, compte tenu des limitations du dessin dans l'environnement papier-crayon.

Par ce travail, nous avons aussi montré que ces apports dépendent des choix effectués par les concepteurs, au niveau de l'interface et donc de l'univers interne, quant aux modes de représentation, les conventions adoptées et leur gestion, les traitements graphiques possibles, les primitives géométriques, les actions possibles, les rétroactions ...
Pour le logiciel Geospace, les choix effectués permettent d'avoir un domaine de fonctionnement du dessin plus important et des rétroactions susceptibles de disqualifier des interprétations illicites. Cependant, ces choix peuvent induire ou renforcer des conceptions erronées chez des élèves comme l'association du plan au parallélogramme le représentant, mais aussi des ambiguïtés quant à l'interprétation des rétroactions, le

logiciel ne gérant les aspects des objets que dans le cas où ils sont définis à partir des figures de base.

Quant à la vie des objets dans un environnement informatique, nous avons montré que les deux types de problèmes de construction effective et évoquée peuvent coexister dans un environnement informatique par l'existence des primitives géométriques. Alors que dans l'environnement papier-crayon ces deux types de problème ne peuvent pas coexister, chacun d'eux nécessitant un contrat différent (Chapitre C3). Cela valide notre hypothèse de recherche à savoir que :

Les problèmes de construction effective et de construction évoquée peuvent coexister dans des environnements informatiques sous certains critères.

Il reste à savoir si le rapport des enseignants ayant utilisé un environnement informatique est différent de ceux n'ayant jamais utilisé un environnement informatique. C'est l'objet de notre prochain chapitre D2.

CHAPITRE D2

RAPPORT A L'OBJET "PROBLEME DE CONSTRUCTION DANS L'ESPACE" DES ENSEIGNANTS AYANT UTILISE UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE

Nous nous proposons d'étudier si le rapport de l'enseignant à l'objet de savoir "problèmes de construction dans l'espace" est différent selon que l'enseignant utilise ou non un tel environnement. Pour cela nous proposons un dispositif expérimental analogue à celui que nous avons utilisé dans le chapitre C3 auprès des enseignants n'ayant pas utilisé un environnement informatique.

Dans le chapitre C3, nous avons montré que les deux types de problèmes "construction effective" et "construction évoquée" ne peuvent pas coexister dans l'environnement "papier-crayon", étant donné que chacun d'eux nécessite un contrat différent par rapport aux productions d'élèves (hypothèse de recherche "papier-crayon"). De plus, ce travail nous a permis d'étudier le rapport personnel des enseignants aux problèmes de construction dans l'espace. Celui-ci était en conformité avec le rapport institutionnel R2[1] lors de l'analyse des "exercices - production" d'élèves. Par l'existence des primitives géométriques, les deux types de problèmes de construction effective et évoquée peuvent coexister dans un environnement informatique (chapitre D1). Donc, tous les problèmes de construction sont des problèmes de construction effective dans l'environnement informatique, à condition d'avoir des primitives permettant la construction des intersections entre des objets géométriques. De même, certains problèmes de construction effective peuvent ne présenter aucun intérêt pour l'enseignement dans un tel environnement.

Nous nous intéressons donc à l'étude du rapport des enseignants, ayant utilisé des environnements informatiques pour l'enseignement de la géométrie dans l'espace, aux problèmes de construction dans l'espace dans les deux environnements : "papier-crayon" et "informatique". L'étude de leurs rapports aux problèmes de construction dans l'environnement "papier-crayon" nous permet de voir s'ils ont ou non les mêmes rapports aux problèmes de construction dans l'espace que les enseignants n'utilisant pas un environnement informatique. L'étude des rapports des enseignants aux problèmes de construction dans l'environnement informatique, nous permet de voir si leur rapport

1 "R2" signifie rapport institutionnel à l'objet "problème de construction dans l'espace" dans l'institution "enseignement dans l'enseignement actuel".

change ou non, étant donné que les problèmes de construction ne vivent pas de la même façon dans les deux environnements.

1. CHOIX DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Nous avons choisi de travailler avec des enseignants qui ont utilisé un environnement informatique pour l'enseignement de la géométrie dans l'espace, en classes de Seconde ou de Première. Nous distinguons trois parties : "Productions papier-crayon", "Questionnaire" et "Production Geospace".

La première partie nous permet de voir si ces enseignants ont le même rapport à l'objet "problème de construction dans l'espace", dans l'environnement papier-crayon, que les enseignants n'utilisant pas un environnement informatique, c'est-à-dire en conformité avec le rapport institutionnel R2.

L'objet du questionnaire (partie 2) est d'avoir des informations sur le choix et les conditions d'utilisation du logiciel.

Enfin, la troisième partie, a pour objet d'étudier les rapports des enseignants à l'objet "problème de construction dans l'espace" dans l'environnement informatique.

1.1. Partie 1 : Productions papier-crayon

Nous avons présenté aux enseignants des énoncés d'exercices avec des productions d'élèves. Ce sont des productions d'élèves qui n'utilisent pas d'environnement informatique. Ainsi, nous avons choisi trois exercices-productions : EP.c, EP.I et EP.IV (cf Chapitre C3).

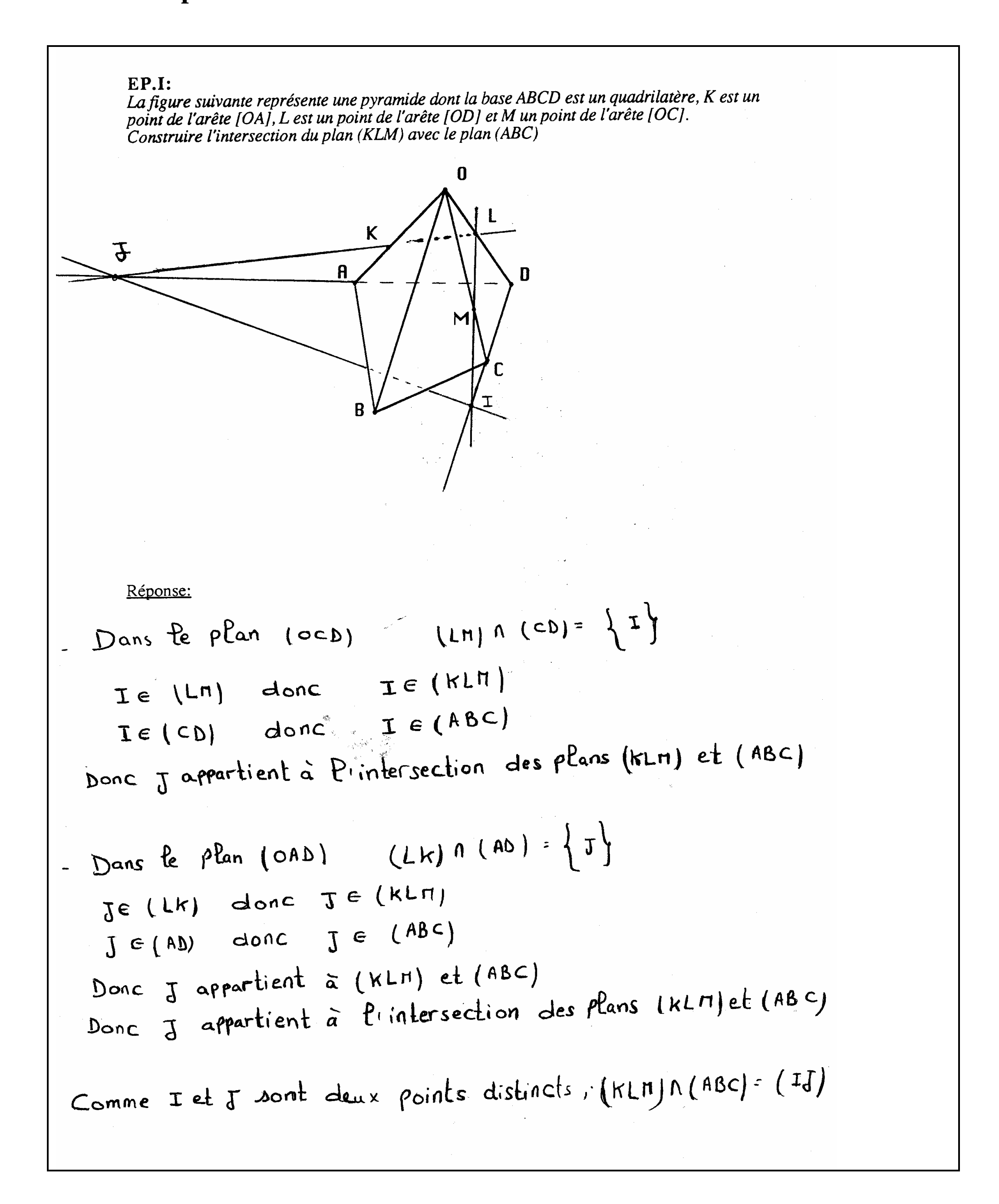
	Exercice/Prod	**EP.I**	**EP.c**	**EP.IV**
E	CS	OUI	OUI	
X	ED	OUI		
E	PCef/ev	PCef	PCef	PCev
P R	Tracé	OUI		
O D	Etudier l'existence			OUI
U C	Construction effective	OUI		
T	Construction évoquée		PU(PP)	RU(PP)

Tableau 46: choix des exercices-productions[2]

[2] Rappelons certains codes utilisés dans ce tableau:
CS : le cas où l'énoncé fait référence à un ou plusieurs solides
ED : les énoncés qui sont accompagnés d'un dessin représentant les données
Pcef : un problème où la résolution peut se faire à l'aide d'une construction effective

Ce choix est suffisant pour vérifier si les rapports des enseignants aux problèmes de construction sont en conformité avec le rapport institutionnel R2 (cf. Analyse a priori, 1.5.1, p.301).

Exercice - production EP.I



EP.I:

La figure suivante représente une pyramide dont la base ABCD est un quadrilatère, K est un point de l'arête [OA], L est un point de l'arête [OD] et M un point de l'arête [OC].
Construire l'intersection du plan (KLM) avec le plan (ABC)

Réponse:

- Dans le plan (OCD) (LM) ∩ (CD) = {I}
  I ∈ (LM) donc I ∈ (KLM)
  I ∈ (CD) donc I ∈ (ABC)
  Donc J appartient à l'intersection des plans (KLM) et (ABC)

- Dans le plan (OAD) (LK) ∩ (AD) = {J}
  J ∈ (LK) donc J ∈ (KLM)
  J ∈ (AD) donc J ∈ (ABC)
  Donc J appartient à (KLM) et (ABC)
  Donc J appartient à l'intersection des plans (KLM) et (ABC)

Comme I et J sont deux points distincts, (KLM) ∩ (ABC) = (IJ)

PCev : un problème où la réalisation sur un dessin ne peut se faire qu'à l'aide d'une construction évoquée
RU(P, d) : la production utilise une règle d'usage consistant à "tracer l'intersection, lorsqu'elle existe, d'un plan et d'une droite"
RU(P,P) : la production utilise une règle d'usage consistant à "tracer l'intersection, lorsqu'elle existe, de deux plans

Exercice - production EP.c

Exercice 7
Soit ABCD un tétraèdre. I est un point de la face (ADC), J est un point de la face (ABC).
Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).

Je prend un plan contenant (IJ) ; le plan coupe (BCD) selon une droite Δ.
Je prends l'intersection de Δ avec (IJ).

Exercice - production EP.IV

EP.IV:
Soit P un plan, d une droite sécante à P et A un point n'appartenant ni à d ni à P. Construire une droite passant par A, sécante à d et parallèle à P.

Réponse:

Soit Q le plan passant par A et contenant d.
Comme d est sécante avec P, P et Q se coupent :
$P \cap Q = \Delta$
Dans le plan Q, je trace une droite passant par A et parralléle à Δ.
cette droite est parrallèle à P et elle passe par A.

1.2. Partie 2 : Questionnaire

Ce questionnaire porte sur les rubriques suivantes:
- *le logiciel utilisé* : il s'agit de savoir quels ont été les critères du ou des choix de logiciel(s).
- *Fréquence d'utilisation* : dans cette rubrique nous examinerons d'une part le nombre d'années d'utilisation d'un environnement informatique et d'autre part le volume horaire qui est consacré par rapport à la progression. Ceci nous permettra de déterminer l'impact du temps d'utilisation sur l'évolution du rapport de l'enseignant à l'objet de savoir "problème de construction dans l'espace".
- *Objectifs* : on veut connaître les objectifs de l'utilisation d'un tel environnement et ce qu'il apporte de plus à l'enseignant que les situations papier-crayon.
- *Place dans la progression* : il s'agit de savoir si l'utilisation d'un tel environnement est un moment singulier dans la période où l'enseignant traite de la géométrie dans l'espace ou au contraire, si l'environnement est utilisé à différents moments de la progression.
- *Types de problèmes et organisation de la séance* : L'objectif de cette rubrique est de savoir s'il y a des activités spécifiques pour l'environnement informatique et d'autres réservées au "papier crayon", ou si ce sont les mêmes activités mais avec des différences au niveau de la gestion ou de la nature des questions posées.

1.3. Partie 3 : Productions GEOESPACE

Nous avons proposé trois activités accompagnées de productions d'élèves sous forme d'un dessin-ei enregistré dans un fichier, comme une trace du travail de l'élève dans l'environnement Geospace.

1.3.1. Activité GEO.1

C'est un problème de construction effective, qui est conforme aux pratiques des manuels. La production a les caractéristiques suivantes :

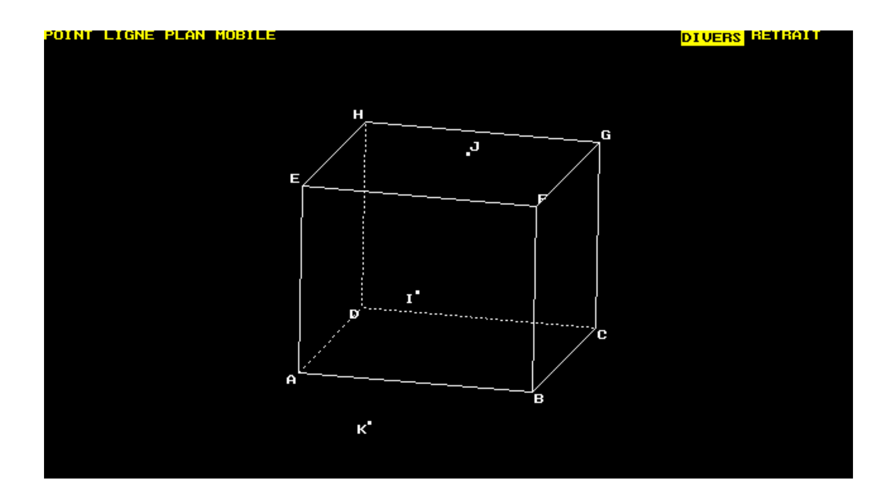
- Elle n'utilise aucun tracé arbitraire. Autrement dit toutes les constructions élémentaires sont basées sur les primitives du logiciel.
- L'algorithme utilisé se traduirait sur papier-crayon par l'utilisation d'une règle d'usage.
- La solution ne présente "aucun intérêt" par rapport à la mise en oeuvre des propriétés d'incidence.

i) Enoncé :
ABCDEFGH est un cube. K est un point du plan (ABC). J est un point du plan (FGH).
Construire l'intersection de la droite (JK) avec le plan (ADE).

ii) Production

A l'aide de la primitive "intersection droite-plan", on construit le point d'intersection.

iii) Figure présentée



1.3.2. Activité GEO.2

C'est un problème de construction évoquée.

La production a les caractéristiques suivantes :

- Elle n'utilise que les primitives "papier-crayon".
- Choix arbitraire d'une position d'un point, de façon perceptive.

i) Enoncé

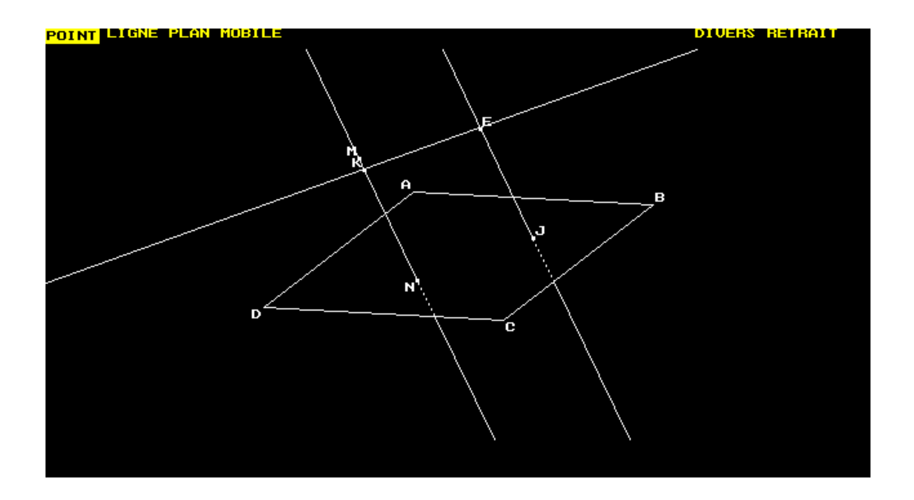
Soit P un plan, d une droite sécante à P et E un point n'appartenant ni à d ni à P. Construire une droite passant par E, sécante à d et parallèle à P.

ii) Production

1. Choix d'une figure de base "Plan" (ABCD) qu'on notera P.
2. Créer deux points "libres", M et N.
3. Créer la droite d passant par M et N.
4. Créer un point libre, E.
5. Créer une droite parallèle à d passant par E, qu'on notera X.
6. Créer un point J sur la droite X.
7. Déplacer le point J, de façon perceptive, jusqu'au début des pointillés.
8. Déplacer le point N, de façon perceptive, jusqu'au début des pointillés.

Créer une droite passant par E, parallèle à (MJ).

iii) Figure présentée



iv) Remarques

L'arbitraire n'est pas de même nature que sur papier-crayon. En effet, les pointillés sont gérés par l'environnement, puisqu'il gère les parties cachées. Ainsi le point d'intersection de la droite X avec le plan P, existe pour l'environnement : c'est le point à partir duquel "commencent" les pointillés. En fait, ce point est l'intersection de la droite X avec la face ABCD.

Cette solution est correcte mais elle ne résiste pas au déplacement. Cela pose le problème de ce qu'est une réponse correcte dans l'environnement Geospace.

1.3.3. Activité GEO.3

C'est un problème de construction évoquée.

La production a les caractéristiques suivantes :

- Elle utilise des primitives "intersection plan-plan" ou "intersection plan-droite".
- Correcte d'un point de vue "construction à l'aide de l'environnement Geospace".

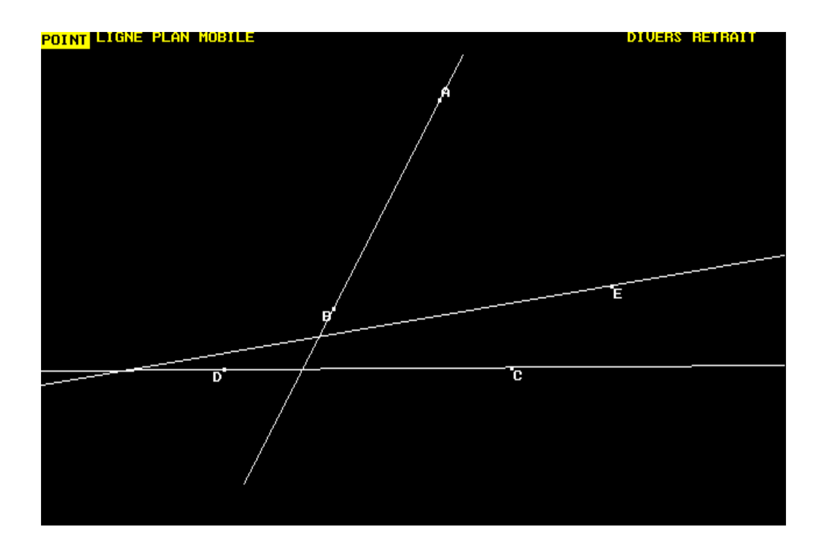
i) Enoncé :

Soient D et D' deux droites non coplanaires. E un point qui n'appartient ni à D ni à D'. Construire une droite issue de E et sécante à D et à D'.

ii) Production

La droite cherchée s'obtient comme intersection des plans (E,D) et (E,D'), par la primitive "intersection plan-plan".

iii) Figure présentée



1.4. Enseignants

Pour le choix des enseignants, deux paramètres nous paraissent a priori importants pour l'analyse des interviews :
- Le logiciel étudié : logiciel du plan / logiciel de l'espace
- Le temps d'utilisation du logiciel.

Enseignant	Logiciel utilisé		Temps	
	Plan	Espace	1° année	Plus
E.JC	Cabri			6 ans
E.CH		Geospace	2h30	
E.CF	Cabri	Geospace		2 ans

1.5. Analyse a priori

Nous examinerons les phases "productions papier-crayon" et "production Geospace".

1.5.1. Productions papier-crayon

Nous avons mis en évidence dans le chapitre C3 des critères que doivent vérifier les réponses des élèves, par rapport aux attentes d'enseignants[3], pour les problèmes de construction dans l'environnement papier-crayon selon le rapport institutionnel R2[4].

3 N'utilisant pas d'environnement informatique.
4 "R2pap" signifie rapport institutionnel à l'objet "problème de construction dans l'espace dans l'environnement papier-crayon" dans l'institution "enseignement dans l'enseignement actuel"

Ainsi, les productions d'élèves pour les problèmes de construction effective doivent être accompagnées d'un dessin, d'un algorithme de construction "effective"[5] et d'une justification. L'étude des différents cas n'est pas exigée si l'énoncé est accompagné d'un dessin, sur lequel les données sont représentées.

Compte tenu des choix des exercices et des productions[6], ils devraient être évalués selon le rapport R2 comme suit.

a) Exercice production EP.I

Cet exercice est conforme aux attentes des enseignants selon le rapport institutionnel R2. Cependant, on peut attendre des remarques des enseignants sur le niveau de justification.

b) Exercice production E3

L'exercice est un problème de construction effective considéré comme "classique" par les enseignants. En revanche, la production devrait être considérée "incomplète", étant donné qu'elle ne donne pas les moyens de construction effective sur papier crayon. De plus, l'absence de dessin devrait être contestée.

c) Exercice production EP.IV

Nous nous attendions à ce que l'enseignant soit rejette l'exercice et la production, soit seulement la production.
Le rejet de l'exercice peut être argumenté soit parce que c'est un type d'exercice qu'on ne traite plus dans l'enseignement actuel, soit avec des arguments plus précis, comme le raisonnement qu'il nécessite, ou encore le fait que l'exercice ne portant pas sur les solides, c'est difficile ... etc.
Pour le rejet de la production, on attend des arguments du type, "la solution ne donne pas les moyens pour réaliser la construction", "absence du dessin", "il faut continuer" ... etc.

1.5.2. Production "GEOSPACE"

Si on se limite au dessin représenté sur l'écran, comme dessin sur papier-crayon, alors la production ne répond pas aux critères que doivent vérifier les réponses aux problèmes de construction. Seulement, dans le cas de cet environnement et contrairement au cas

---

5 C'est un algorithme qui n'utilise comme primitive de construction d'intersection que "l'intersection de droites".
6 Tableau 46: choix des exercices-production, p.295

papier-crayon, on peut valider le procédé de construction par les moyens offerts par le logiciel Geospace :
- Validation par déplacement
- Validation par "Historique" ou "Rappel"
"Rappel" : donne la liste des objets construits, dans l'ordre où ils ont été crées, avec leur nom et leur définition.
"Historique" : permet de suivre pas à pas les constructions effectuées.
- Validation par les primitives géométriques quand c'est possible.

Pour les enseignants ayant utilisé le logiciel "Geospace", nous nous intéresserons d'abord aux moyens qu'ils utiliseront pour évaluer la construction. En particulier :
- Feraient-ils appel à l'historique de la construction ("Rappel" ou "Historique") ? C'est le seul moyen d'accéder au procédé de construction.
- Valideraient-ils la construction par déplacement ? L'enseignant peut utiliser le déplacement comme un premier moyen de validation de la construction. Cela permet d'éliminer les constructions faites de façon perceptive, comme le cas de l'activité GEO.2.
- Feront-ils appel aux primitives géométriques ?

Dans le cas où l'enseignant ne mobilise pas ces moyens de validation, nous lui présenterons l'historique et si nécessaire d'autres moyens de validation.

a) Activité GEO.1

Les moyens de validation possibles :
- Par le dessin représenté sur l'écran : il est difficile d'en tirer des informations puisque seuls les trois points sont représentés.
- Par "Rappel" : affichage du texte ci-dessous

POINT LIGNE PLAN MOBILE
1 J mobile dans le plan EFG
2 K mobile dans le plan ABC
3 I intersection de la droite (JK) et du plan ABF

- Par "Historique" : Les trois étapes du "Rappel" sont illustrées par des constructions une par une.

- Par les primitives géométriques : Vérifier que I appartient au plan (ABF) en demandant l'intersection des droites (EI) et (BF). Ensuite, vérifier que I est sur la droite (JK), Par exemple en examinant l'intersection des droites (JI) et (IK).

Une fois que l'enseignant aura accédé au procédé de construction, nous nous attendons à ce qu'il rejette cette activité en estimant que l'élève n'a mobilisé aucune connaissance. En effet, le point d'intersection est obtenu à l'aide de la primitive "intersection droite-plan".

b) Activité GEO.2

Le problème de cette activité étant le même, que celui de EP.IV. Ce problème ne peut pas vivre dans l'environnement "papier-crayon", sous la contrainte du rapport institutionnel R2. Mais il peut vivre dans un environnement informatique comme Geospace, étant donné que les problèmes de construction effective et évoquée peuvent vivre dans Geospace sous le même contrat et donc selon un nouveau rapport institutionnel. Nous cherchons à savoir si l'enseignant fera la même analyse du problème ou non dans les deux activités.

Les moyens de validation possibles :
- Par le dessin représenté sur l'écran : en se basant sur les conventions de représentation, on peut avoir une idée sur la démarche de l'élève. En effet, le dessin met en évidence une droite parallèle à d[7], son point d'intersection avec le plan P, et une droite passant par E qui semble être parallèle à (NJ).
- Par "Rappel" : affichage du texte ci-dessous

POINT LIGNE PLAN MOBILE

1 M point libre
2 N point libre
3 Droite (MN)
4 E point libre
5 Y parallèle à (MN) passant par E
6 J mobile sur (Y)
7 Z parallèle à (NJ) passant par E
8 K intersection des droites (Z) et (MN)

- Par "Historique" : toutes les étapes du "rappel" sont illustrées par des constructions, données une par une. Les points J et N sont placés directement au début des pointillés.

7 la droite (MN)

Autrement dit, les étapes 7 et 8 de notre production (cf. page 299), ne sont pas illustrées par l'historique.

- Par les primitives géométriques : si l'enseignant est persuadé que les points J et N sont des points d'intersection des deux droites avec le plan P, il peut demander l'intersection des droites (JN) et (EK) pour vérifier qu'elles sont effectivement parallèles (éventuellement en déplaçant un des points mobiles).

c) Activité GEO.3

- Par le dessin représenté sur l'écran : on ne peut rien déduire
- Par "Rappel" : affichage du texte ci-dessous

POINT LIGNE PLAN MOBILE

1 A point libre
2 B point libre
3 C point libre
4 D point libre
5 Droite (AB)
6 Droite (CD)
7 E point libre
8 X intersection des plans ECD et EAB

A

- Par "Historique" : toutes les étapes du "rappel" sont illustrées par des constructions, données une par une.
- Par les primitives géométriques : on peut utiliser l'intersection des droites pour vérifier que la droite passant par E est sécante avec les droites (AB) et (CD).
- Par déplacement, on ne peut rien en inférer.

d) La place de cet environnement informatique et son rôle pour l'enseignant

A la fin, nous présentons à l'enseignant les différentes solutions des exercices. Par exemple, pour l'exercice GEO2 nous proposerons trois solutions[8], S1R(P,P), S2R(P,d) et S3R(P,d), en mettant en évidence la gestion de l'environnement informatique des objets géométriques, de leurs relations, la richesse des différentes solutions quant aux propriétés géométriques ...

Ce travail doit amener les enseignants à évaluer les apports d'un tel environnement informatique en géométrie dans l'espace.

8 Cf. Annexe B2.a

2. ANALYSE

2.1. Enseignant CH

2.1.1. Productions papier-crayon

La production EPI est considérée comme correcte par l'enseignant qui est même "surpris par la rédaction". L'enseignant considère les autres productions comme incomplètes.

a) Exercice production EP.c

L'absence du dessin était la première remarque de l'enseignant.

E.CH : " Et là il n'y a pas de figures"

H : "On n'a donné que de l'énoncé"

L'enseignant lit l'énoncé et illustre par un dessin et ensuite il évalue la production :

E.CH : "Si c'est à corriger, je dirai qu'il n'y a pas de figure, je ne peux pas comprendre, comment on prend le plan ? Lequel ? Voilà !"

b) Exercice production EP.IV

Avant de lire cette production, l'enseignant propose de résoudre l'exercice. Ensuite, il compare sa solution par rapport à celle de l'élève et il décrit les différentes étapes de sa résolution.

E.CH : "C'est pas plus précis que ça ! On n'a pas les moyens de le faire de façon plus précise, si ?
Il dessine le plan Q quelconque, je ne peux pas savoir lequel ?
Je trace la parallèle à d passant par A. Je place le point M, mais moi je ne sais pas construire le point M, je l'ai placé seulement. Ensuite, je trace la parallèle à (PM). Cette droite est parallèle à P et elle passe par A."

Il commence par représenter le plan Q (proposé dans la production de l'élève). Celui-ci ne lui permet pas de poursuivre les constructions car la représentation du plan est arbitraire. Il modifie donc l'algorithme de construction, en proposant le suivant :

- construire une droite parallèle à d passant par A : l'enseignant trace la droite,
- construire le point d'intersection de cette droite avec le plan P : il place le point en soulignant qu'il le fait de façon arbitraire,
- construire une parallèle à la droite, passant par M et le point d'intersection de d avec le plan P (l'enseignant a désigné ce point par P), passant par A.

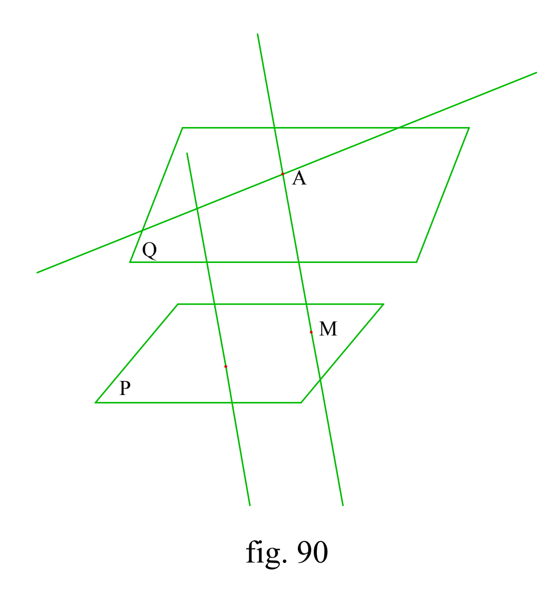


fig. 90

La solution proposée est une construction évoquée utilisant la règle d'usage RU(P,D). Rappelons que la solution proposée par l'élève utilise la règle d'usage RU(P,P), alors que celle proposée par l'enseignant utilise la règle d'usage RU(P,D). L'enseignant pense que la méthode de l'élève "est plus difficile" que la sienne. Nous l'expliquons par le fait que les conventions de représentation offrent plus d'éléments de contrôle perceptif dans le cas de l'intersection d'un plan et d'une droite que dans le cas de deux plans. Cela rejoint l'hypothèse formulée dans le chapitre C3 et qu'il reste à valider : *dans les problèmes de construction évoquée, l'utilisation de la règle d'usage RU(P,D) est plus mobilisée que la règle RU(P,P).*

> E.CH : " Ça va mais ... ce qu'on fait, on est dans des constructions où on reste maître de la position du point qu'on donne, parce qu'on a pas assez d'éléments pour avoir une construction précise. Tandis que dans la première figure c'était des positions précises des points. Pour réaliser le plan Q et trouver l'intersection avec P pour l'élève c'est plus difficile que ma méthode"

Ainsi, il considère cette construction comme particulière, étant donné qu'il manque des éléments pour construire le point M avec précision. En d'autres termes, c'est un problème de construction évoquée, alors que le premier est un problème de construction effective.

2.1.2. Questionnaire

Il s'agit de la première année où l'enseignant utilise un environnement informatique, suite à une initiative d'un collègue de l'établissement. Il l'a utilisé pour introduire[9] la géométrie dans l'espace en Seconde.

---

9 L'utilisation est très faible : 1h30 par élève

Parmi les objectifs de l'utilisation du logiciel l'enseignant range l'animation des dessins-ei comme permettant le développement de la perception et la maîtrise de la lecture en perspective cavalière.

> E.CH : " Le fait que les figures sont animées, ça développe la perception et la lecture des figures en perspective.. . Je l'ai utilisé pour introduire la géométrie dans l'espace. Je ne suis pas revenu après. J'avais eu peut-être l'occasion de voir des erreurs qui étaient la lecture du premier degré d'une figure en perspective cavalière, ils la prennent comme une figure plane et les droites perpendiculaires sur la figure ils l'imaginent comme perpendiculaires dans l'objet. Je pense que l'utilisation du logiciel doit les aider à la lecture des figures."

A cet effet, l'enseignant propose des activités sur la lecture du dessin et sur les interprétations de la lecture.

2.1.3. Productions GEOESPACE

a) Activité GEO.1

Après la lecture de l'énoncé, l'enseignant demande si l'élève a produit seulement cette figure. En effet, il s'attend à ce qu'il donne des justifications[10].

> E.CH : "Lui alors il n'a fourni que ça !"
>
> H : "On lui a demandé de travailler uniquement sur le logiciel".
>
> E.CH: "On n'avait pas demandé des productions écrites."

Cherchant à comprendre comment l'élève a déterminé ce point d'intersection, il reproche l'absence des traces de construction comme celles que l'élève laisse sur son dessin.

> E.CH : "Il pouvait rester des lignes de construction. Je ne sais pas pourquoi est-ce point là ? C'est évident ou quoi ?"

L'enseignant ne déplace aucun point et ne demande pas l'historique de la construction. Ceci s'explique par le fait que l'enseignant ne maîtrise pas le logiciel. Nous lui avons donc proposé la démarche de l'élève.

> H : "Le cube est un objet de base. L'élève a demandé le cube, ensuite il a placé le point J dans le plan (EFGH) et le point K dans le plan (ABC) et ensuite il a demandé l'intersection de (JK) avec le plan (ABFE)"

---

10 Elle peut être sous forme d'explication des différentes étapes ou seulement un algorithme de construction. Nous interprétons ce terme de justifications dans cette large acception "explication"

E: "Pour moi, c'est pas intéressant, ils ne sauront pas le reproduire sur papier-crayon, ils ne sauront pas pourquoi le point est placé là."

Comme nous l'avons prévu dans l'analyse a priori, l'enseignant pense que cet exercice n'est pas intéressant. De plus cette résolution, ne garantit pas si l'élève saura résoudre ce problème sur papier-crayon, autrement dit, en tant que problème de construction effective avec la seule primitive " intersection de deux droites".
Voyant qu'il faut faire des constructions intermédiaires, il se demande quelle peut être la méthode de résolution.

E. CH : "c'est magique. Je suis toujours en train de me demander comment est-ce qu'on peut faire ? Je vois bien qu'il faut faire des constructions intermédiaires. Il faut chercher pour trouver des méthodes."

H : "On y reviendra après."

b) Activité GEO.2

L'enseignant lit et constate que c'est le même exercice étudié précédemment[11].

E. CH : "Et le point J, il l'a obtenu comme intersection de la droite avec le plan. Parce que comme je vous disais tout à l'heure, il n'y a pas de raison de le placer là ou là ce point J. C'est le logiciel qui l'a placé ?"

En effet, dans l'exercice EP. IV, il a rejeté le fait que le point M, de sa solution, a été placé de façon arbitraire sur le dessin.
Nous lui demandons les moyens qu'il peut mettre en oeuvre pour valider la construction de l'élève.

H : "Je ne m'en souviens plus. Alors justement, c'est une question qui m'intéresse : maintenant qu'on a la figure finale, comment peut-on contrôler la construction ?"

E. CH : "C'est difficile; parce que le point J, on sait pas comment il l'a obtenu."

Comme nous l'avons souligné ci-dessus, l'enseignant ne maîtrisant pas parfaitement ce logiciel, il ne dispose d'aucun moyen de contrôle. Nous lui présentons donc la démarche de l'élève.

E. CH : "Ensuite on trace la parallèle par E à JN. C'est une bonne lecture de l'espace."

H : "Maintenant, si on trace la droite (JN) ... on voit qu'elle n'est pas dans le plan."

E. CH : "Ah, elle n'est pas dans le plan ? Alors qu'est-ce qu'il a fait comme construction ? Donc le point J n'était pas pile sur l'intersection ?"

---

11 Exercice EP.IV

Donc pour l'enseignant, si le point est placé à l'endroit de l'intersection, il devrait être reconnu et géré par le logiciel en tant que tel.

E. CH : "Et donc, la machine par le calcul ne le reconnaît pas comme élément du plan ?"

Ceci nous interroge sur le rapport de l'enseignant à l'environnement informatique dans la classe de mathématiques et en particulier pour ce logiciel Geospace. Cette question ne relève pas de notre cadre d'étude. Cependant, la suite de l'interview nous a apporté quelques éléments de réponse. En effet, après avoir précisé à l'enseignant que le point J était placé sur la droite et ensuite il a été déplacé à l'endroit de l'intersection de façon perceptive, l'enseignant fait des commentaires sur l'emploi des logiciels en mathématiques :

E. CH : "Du point de vue pédagogique je me dis qu'il y a un truc qui est complètement fermé puisqu'il y a un logiciel ... lui il sait trouver le point J et nous on ne sait pas le faire. Et pour l'élève il faut qu'il considère... Donc le logiciel le trouve par les calculs, ils sont hors de portées des élèves, donc il y a vraiment une vérité à l'intérieur de la machine et qui est inaccessible. C'est fou ça d'un point de vue pédagogique ! Si vous mettez un exercice que seul l'ordinateur sait le résoudre par le calcul, nous on est là pour faire quoi ? C'est ça le but que vous fixez : que l'élève arrive à conclure qu'il ne sait pas ?

Nous y reviendrons sur ce point après l'analyse de l'activité GEO. 3.

c) Activité GEO.3

Comme dans la situation précédente, l'enseignant nous demande la solution du problème. Il évalue la situation comme non intéressante sur le plan de la vision dans l'espace.

E.CH : "Il n'a rien fait l'élève. Il ne lui a rien apporté sur le plan de la vision dans l'espace."

Donc, cette évaluation se place au niveau du dessin et plus précisément par rapport à la réalisation effective de la construction, et non sur le plan de la mobilisation des propriétés géométriques et du raisonnement qui constituent une richesse pour cet exercice.

d) La place de cet environnement informatique et son rôle pour l'enseignant

La présentation des différentes solutions des exercices a suscité des remarques de la part de l'enseignant sur l'apport d'un environnement informatique en classe de mathématiques et en géométrie dans l'espace en particulier.

- "*il y a vraiment une vérité à l'intérieur de la machine et qui est inaccessible* " (E. CH)
L'enseignant rejette le fait que l'environnement informatique a les moyens de construire le point d'intersection d'une droite avec un plan par exemple, alors qu'on ne dispose d'aucun moyen pour le faire sur papier crayon. L'enseignant voit une rupture du contrat didactique entre les deux environnements papier-crayon et informatique :

> E. CH : "En fait, je crains la confusion qui serait qu'ils croient après ça, quand eux ils vont faire ça sur papier crayon, alors pour eux il n'y aura qu'un point. J'ai peur quand ils auront ce dessin là, ils diront «mais mon point il est où ?, je ne peux pas le trouver, c'est que je ne suis pas assez bon, c'est tout»"

Le problème de l'activité GEO.2, est un problème de construction évoquée sur l'environnement papier-crayon et effective dans l'environnement informatique. Donc, il nécessite des contrats didactiques différents selon l'environnement. Ceci rejoint notre hypothèse "papier-crayon" selon laquelle les problèmes de construction effective et les problèmes de construction évoquée ne peuvent pas coexister, étant donné que chacun d'eux nécessite un contrat différent.

- " *La machine a une seule figure, alors que nous on a une infinité de représentations pour un même dessin.*" (E. CH)
On retrouve de nouveau le problème du rupture du contrat didactique entre l'environnement informatique et papier-crayon.

> E. CH : "Il y a une différence parce que la machine a une seule figure, alors que nous on a une infinité de représentation pour un même dessin, un même croquis quoi. Elle, elle peut gérer ça parce qu'elle a un seul objet. Les élèves comprendront difficilement la différence que la machine a qu'un objet et eux ils en gèrent plusieurs!.

Ce problème est relatif aux conventions de représentation des objets de l'espace, comme la représentation du plan par un parallélogramme.

- " *... l'image de l'écran alors qu'elle ressemble énormément à l'image sur une feuille mais ...*"
Ainsi, l'enseignant soulève le fait que le dessin-ei et le dessin-pc se ressemblent d'un point de vue de la représentation graphique mais ils ne sont pas de même nature.

> E. CH : "Et cette idée que l'image de l'écran alors qu'elle ressemble énormément à l'image sur une feuille de papier, mais ne sont pas de même nature, parce qu'il y a un seul objet derrière alors que nous on a une infinité sur papier !."

- "*Il faut connaître complètement le menu*" (E.CH)
L'enseignant soulève qu'une des difficultés d'intégration d'un environnement informatique dans l'enseignement des mathématiques réside dans la connaissance parfaite du logiciel par les élèves qui est difficile et coûteuse en temps.

- "*...possibilité de faire tourner... avoir la représentation en vraie grandeur.*"
Quant à l'utilisation de Geospace, il voit l'intérêt dans la possibilité de représenter en vraie grandeur des objets d'un plan.

> E. CH : "C'est-à-dire le logiciel leur donne la possibilité d'aller demander la représentation exacte d'un plan finalement. Par exemple, quand je leur ai demandé «est-ce que HIE est un triangle rectangle ?» Ils pouvait eux aller demander à voir le plan en face. C'était une possibilité que leur donnait le logiciel, non seulement à faire tourner pour développer chez eux l'intuition, mais aussi à imaginer un plan particulier dans un solide. C'est la représentation en vraie grandeur."

Et aussi la possibilité de faire tourner les solides, car c'est un moyen de développer l'image mentale des élèves à propos des objets de l'espace.

2.1.4. Conclusion

Pour les productions papier-crayon, nous retrouvons les mêmes critères d'évaluation des productions d'élèves que les enseignants n'ayant jamais utilisé un environnement informatique.
L'utilisation d'un environnement informatique pour la géométrie dans l'espace, a pour objectifs, pour l'enseignant, de développer la perception et la maîtrise de la lecture du dessin par la possibilité de "la représentation en vraie grandeur " en particulier.
Ne maîtrisant pas le menu du logiciel, il n'a utilisé aucun moyen, offert par le logiciel, pour contrôler la validité des constructions. Ainsi, la première production a-t-elle été évaluée par la perception, et l'absence des constructions intermédiaires, comme sur papier-crayon, ne lui a pas permis de porter jugement. Quant aux situations, il pense qu'elles ne sont pas intéressantes, et ce pour aux moins deux raisons :

- Elles ne développent pas la perception, ce qui est cohérent avec les objectifs fixés par l'enseignant pour l'utilisation du logiciel.
- Il y a rupture du contrat didactique quant à la résolution des problèmes de construction entre les deux environnements papier-crayon et informatique.

Donc, les productions "papier-crayon" et "environnement informatique" ont été évaluées selon le même rapport institutionnel R2 : rapport institutionnel à l'objet

"problème de construction dans l'espace" dans l'environnement papier-crayon dans l'institution "enseignement secondaire" (cf. Chapitre C3, 2.5p. 241).

2.2. Enseignant CF

2.2.1. Productions papier-crayon

Cet enseignant commente d'abord les exercices puis les productions.

a) Exercice production EP.I

L'exercice est considéré parmi les activités qu'on peut proposer en fin de la classe de Seconde ou en Première, caractérisés par une technique de résolution à savoir de travailler dans les plans auxiliaires :

> E.CF : "pour moi ce sont des activités dès la fin seconde, début première, ... Pour ces exercices, la technique c'est qu'il se repèrent dans des plans annexes ce qui n'est pas facile."

Quant à la production, l'enseignant demande d'abord si les points K, L et M étaient placés, ce qu'il lui permet de conclure qu'il n'était pas nécessaire de discuter les différents cas. Ensuite, l'examen de la réponse lui témoigne que l'élève a déjà vu la "technique" en classe .

> E.CF : "On voit qu'ils ont vu la technique en classe; On voit qu'il y a un travail bien, organisé."

Donc, l'enseignant évalue l'exercice et la production par rapport à une technique de résolution utilisée dans les problèmes de construction effective sur des solides, et où la notion de plan auxiliaire joue un rôle important, selon l'un des schémas développés dans le chapitre C2.

b) Exercice production EP.c

Comme le dessin n'est pas dans l'énoncé, l'enseignant pense qu'il faut discuter les différents cas. L'exercice est considéré comme "classique", mais la production est incomplète, il manque les arguments et le dessin.

> E.CF : "Ils ont vu ça en seconde; ils doivent savoir qu'il faut considérer le plan (AIJ). Il manque des arguments. C'est insuffisant, il manque le dessin; Il y a l'idée qui est correcte mais c'est incomplet."

L'enseignant indique le plan (AIJ) comme plan auxiliaire. Il s'agit du même choix que font les manuels : parmi les plans auxiliaires possibles, on prend un plan défini par l'un des sommets du polyèdre.

c) Exercice production EP.IV

L'exercice est rejeté parce qu'il ne porte pas sur les solides. L'enseignant précise que dans l'enseignement actuel, les exercices portent sur les solides, alors que le travail sur les objets géométriques, plan et droite, sans solide, se fait au niveau du cours pour illustrer des théorèmes.

> E.CF : "il n'y a pas de solide! Je n'en fait plus guère ce genre d'exercice. Maintenant on se limite aux solides... sauf pour le cours, là on est obligé de regarder les intersections de plans, le seul cas où je fais des dessins comme ça c'est dans les théorèmes."

Quant à la production, il pense qu'elle donne la méthode mais sans la technique. Et donc il y a un problème en terme de "construction définitive".

L'enseignant utilise tous les critères que doivent vérifier les productions d'élèves selon le rapport R2pap dans leurs évaluations par l'enseignant.

2.2.2. Questionnaire

Il utilise les environnements informatiques dans le plan[12] et dans l'espace. Pour des raisons matérielles, l'utilisation du logiciel Geospace, se limite à ces deux dernières années. L'intérêt de faire travailler les élèves sur un environnement informatique se résume, pour l'enseignant, en quatre points :

- *Motivation*
- *Voir dans l'espace* : le fait qu'on puisse faire tourner l'objet et le voir dans plusieurs positions, permet de développer la "visualisation" des objets de l'espace. Et en particulier, dans les classes des filles, celles-ci ayant plus de difficultés que les garçons à voir dans l'espace.
- *Chercher* : l'exemple cité par l'enseignant est de "voir si deux objets sont coplanaires" (E.CF). Par exemple, en demandant l'intersection de deux droites on peut savoir si elles sont coplanaires ou non, en fonction de l'existence de leur point d'intersection. C'est bien la dimension d'expérimentation et d'exploration de la figure par l'intermédiaire du dessin-environnement informatique, à laquelle l'enseignant fait référence[13].
- *Contre exemple* : le fait de pouvoir mettre le dessin dans une position particulière[14], permet de fournir des contre-exemples à des conjectures. L'exemple donné par l'enseignant est la nature de la section plane du plan diagonal d'un cube.

---

12 Pour la géométrie plane il a utilisé le logiciel "Cabri-géomètre"

13 cf. Chapitre D1

14 montre en vraie grandeur tous les objets de ce plan. Cf. Chapitre D1

E. CF : "je pense par exemple à l'exercice du plan diagonal d'un cube où on demande si c'est un carré; tout le monde dit oui au départ, puis on choisit le plan de face, le plan diagonale et on voit que c'est un rectangle!"

- *Gain de temps* : il fait référence aux situations papier-crayon où l'élève se trouve dans un cas particulier, auquel cas il faut refaire le dessin, alors que dans un environnement informatique on gagne beaucoup de temps.

2.2.3. Productions Geospace

a) Activité GEO.1

La situation est considérée comme non intéressante, si l'élève avait accès à la possibilité qu'offre le menu "intersection d'une droite avec un plan". C'est l'opinion attendue dans l'analyse a priori.

b) Activité GEO.2

Contrairement au cas de l'activité EP.IV, l'enseignant n'a pas rejeté l'exercice.
Estimant qu'il ne peut pas évaluer la réponse, il examine l'historique. L'analyse de cet historique ne lui a pas permis de comprendre comment l'élève a fait, étant donné que le point J est un point mobile sur la droite Y.

E.CF : "Ah, J est mobile sur Y! Oh là là. Mais comment il a fait ?"

H, explique comment l'élève a fait.

E.CF : " Il aurait pu demander l'intersection d'une droite avec un plan, mais il ne l'a pas fait."

H : "Si on déplace le point E, de sorte que l'intersection soit à l'extérieur du parallélogramme, alors on ne peut pas placer ce point J."

E.CF : "Il faut que je fasse attention l'année prochaine."

Ainsi, le problème se pose en termes de moyens de contrôle dont dispose un enseignant sur les productions d'élèves dans des environnements informatiques. En effet, cet enseignant n'a pas validé la construction par déplacement. Autrement dit, il a analysé la situation à partir du dessin-ei et de l'historique. Ainsi, la construction doit répondre au critère suivant : chaque objet de l'algorithme doit être construit à l'aide des primitives géométriques disponibles dans le menu. En particulier, pour la production GEO.2, il fallait utiliser la primitive géométrique "intersection d'une droite avec un plan" pour construire le point J.

c) Activité GEO.3

Le premier moyen de validation utilisé par l'enseignant, est le recours aux primitives géométriques. Pour vérifier que la droite tracée est sécante avec les droites D et D', l'enseignant demande les intersections respectives de la droite avec D et D'. D'ailleurs, il pense que c'est un moyen qui peut être utilisé par les élèves.

E.CF : "l'élève peut vérifier en demandant l'intersection de deux droites, que les droites sont sécantes"

Quant à l'intérêt de l'exercice, il le considère comme intéressant, puisqu'il met en oeuvre un "bon" raisonnement. Quant au dessin-ei, il ne rend pas "visible" l'algorithme de construction. Pour cela, l'enseignant pense qu'il fallait représenter des plans contenant les droites pour illustrer la situation.

E.CF : "C'est un bon exercice, bien élaboré pour les élèves, il y a très peu d'objets, donc c'est du vrai raisonnement derrière. Les droites non coplanaires, c'est pas évident à voir. Disons, le dessin lui même ne parle pas. Mais si on avait représenté des plans contenant respectivement les droites d et d, on peut mieux voir. Les droites et les points sont donc repérés par d'autres objets. Là, c'est pas évident à voir, je me demande comment est-ce qu'il a pu faire !".

2.2.4. Conclusion

Nous avons montré que l'enseignant a évalué les productions papier-crayon, selon le rapport institutionnel R2.
Les objectifs de l'utilisation d'un environnement informatique en géométrie dans l'espace, pour cet enseignant sont : développer la perception et l'utiliser comme modèle d'expérimentation.
Trois moyens de validations sont utilisés par l'enseignant, pour les activités Geospace. Le dessin sur l'écran est le premier moyen d'évaluation. Mais l'absence de traces de constructions intermédiaires, le rend insuffisant. Ensuite, et en absence du texte de l'élève, l'enseignant consulte l'historique de la construction. Enfin, il fait appel aux primitives géométriques, en exécutant des constructions adéquates permettant de conclure.

Les problèmes de construction évoquée dans l'environnement informatique "Geospace" (GEO.2 et GEO.3), n'ont pas été rejetés par l'enseignant. Alors qu'ils étaient rejetés dans le cas des situations papier-crayon. Autrement dit, le rapport de l'enseignant à l'objet "problème de construction dans l'espace" est différent selon qu'on travaille avec l'environnement informatique ou l'environnement papier-crayon. Dans l'environnement "papier-crayon" il s'agit du rapport personnel de l'enseignant en conformité avec le

rapport institutionnel R2, qu'on désignera par $R_p$pap, alors que dans l'environnement Geospace,
il s'agit d'un autre rapport qu'on désignera par $R_p$ei. De ces deux rapports émerge un rapport personnel de l'enseignant à l'objet "problème de construction dans l'espace" qu'on note $R_{p,CF}$. En particulier, selon ce rapport, une solution au problème de construction doit être effective c'est-à-dire que chaque objet de l'algorithme de construction doit pouvoir être construit à partir des primitives géométriques disponibles. Dans le cas de l'environnement papier-crayon les primitives géométriques sont "intersection de deux droites" et toutes les constructions à la règle et au compas, alors qu'avec l'environnement Geospace, les constructions sont effectives par l'utilisation des primitives du logiciel[15].

2.3. Enseignant JC

2.3.1. Productions papier-crayon

a) Exercice production EPI

Il est considéré comme un exercice classique pour la classe de première. Mais comme l'élève n'envisage pas les différents cas, puisque le dessin est donné, la résolution ne devrait pas poser de difficulté en comparaison avec le cas de Cabri. En effet, dans l'environnement Cabri, il faut envisager les différents cas puisque la construction doit résister aux déplacements.

> E.JC : "Je pense que c'est ce qu'il fera un élève de Première bien entraîné. Sur ordinateur je ne sais pas s'il le fera plus facilement comme sur une feuille ! Sur une feuille comme ça, quand le dessin est fait il n'y a pas de difficultés de construction, et ça change tout dans un problème. L'inconvénient de ce type de figure par rapport à l'ordinateur c'est qu'ils n'ont pas la notion de variable. Donc ça c'est modeste par rapport à une activité où il faut déplacer les points et envisager tous les cas de figures, c'est une activité différente. Donc ça c'est l'avantage du logiciel par rapport à ce type d'exercices."

b) Exercice production EP.c

Pour l'enseignant, la résolution est incomplète, car elle ne donne pas les moyens de la réalisation effective. Il évoque le problème de "visualisation" du plan contenant la

---

15 rappelons qu'une des remarques faite par l'enseignant à la production "GEO.2", c'est que l'élève n'a pas utilisé la primitive "intersection d'une droite avec un plan" (cf. Activité GEO.2, p.315)

droite(IJ), en précisant que la droite Δ doit être construite à partir de deux plans : (BCD) et l'autre il faut bien le choisir. Il fait référence à la technique du "plan auxiliaire".

c) Exercice production EP.IV

L'exercice lui paraît intéressant, mais si on ne peut pas le résoudre à l'aide d'une construction effective, on ne peut pas le proposer aux élèves.

> E.JC : "Là c'est bien, sauf il n'y a pas de figure. Mais je ne sais pas comment il arrivera à bâtir ce plan, comment visualiser le plan. C'est toujours ça, parce que si on dit ce plan mais on ne sait pas le construire, à quoi ça sert ! C'est pour ça on ne propose ce type d'exercice. Sinon la démarche est bien.

On voit que l'enseignant utilise le critère de "réalisation effective"[16] pour justifier la non viabilité des problèmes de construction évoquée dans l'enseignement actuel.

Cependant, l'enseignant pense que cet exercice peut être intéressant dans le cas où on utilise un environnement informatique, permettant de réaliser les constructions, en particulier celles qu'on ne peut pas réaliser de façon effective en papier-crayon.

> E.JC : " Pour cet exercice la démonstration est satisfaite, disons moi qui fais pas mal de construction géométriques, «Soit Q le plan» mais comment je vais faire ? L'ordinateur ne le fera pas, à moins qu'il y a une commande qui permet de construire un plan parallèle à ... Là c'est bien et c'est ça la force des logiciels, ça permet de réaliser les constructions"

2.3.2. Questionnaire

Cet enseignant utilise pour la géométrie plane, les logiciels "Cabri Géomètre" et "Géoplan" au collège et au lycée. Pour la géométrie dans l'espace, "Cabri I" est utilisé pour la résolution des problèmes de construction.
L'établissement dispose de deux logiciels de l'espace : "Geospace" et "Dessinez l'espace"[17], mais l'enseignant utilise "Cabri I" parce qu'il lui permet de travailler la géométrie plane et la géométrie dans l'espace.

> E : "Parce que Cabri 2D, on commence davantage au collège par la géométrie plane et ça me permet donc de faire les deux. Alors que le logiciel "Geospace" c'est typique de la géométrie dans l'espace et on ne peut pas l'utiliser quand on fait de la géométrie plane."

---

16 au sens algorithme de construction dans les problèmes de construction effective
17 Logiciel édité par IREM de Lorraine.

Nous avançons l'hypothèse que ce choix est lié au problème d'investissement en temps pour l'utilisation d'un logiciel.

Il a utilisé ce logiciel d'abord au collège pendant 3 ans et ensuite au lycée pendant 3 ans également. La fréquence d'utilisation est relativement importante au lycée, 6h en Seconde et 10h en Première.

Quant à la progression, il n'utilise pas le logiciel Geospace pour introduire la géométrie dans l'espace parce qu'il ne lui convient pas ne possédant pas de primitives de construction comme "plan parallèle à ..."

> E : "Pour l'introduire c'est assez difficile justement, parce qu'on a pas les outils comme dans la géométrie plane, droite parallèle à plan, droite perpendiculaire ... il faut avoir fait tout ce travail. J'aimerais bien pouvoir trouver un logiciel qui me fait ça ".
>
> H : "Dans ce cas vous l'utiliserez pour l'introduction de la géométrie dans l'espace ?"
>
> E : "Oui, je l'utiliserais pour introduire. Il va de soi maintenant dans les classes du lycée, on ne fait plus de cours magistraux, c'est fini, donc pour les notions de bases sur les positions relatives de plans, positions relatives de droites, ca serait bien qu'un logiciel, permet d'introduire ça, avec les notions de pointillés."

Autrement dit, s'il disposait d'un logiciel permettant de gérer les éléments géométriques et les relations géométriques ainsi que les conventions de représentation, comme la représentation des parties cachées par des pointillés, alors il l'utiliserait pour introduire la géométrie dans l'espace.

2.3.3. Productions Geospace

a) Activité GEO.1

Comme nous l'avons dit dans l'analyse a priori, l'enseignant E.JC pense que cet exercice ne présente pas d'intérêt pour la mobilisation des propriétés géométriques. Ainsi, il attribue à cet exercice comme objectif, la maîtrise du menu du logiciel.

> E.JC : "Donc là c'est pour tester s'ils ont bien compris le menu ? S'il a appliqué le menu ça ne veut pas dire qu'il sait faire! C'est ça l'inconvénient avec ce système. Avec Cabri on n'aurait pas cette discussion là. Avec Cabri 1 quand je fais un cube, je leur donne des points, il faut que l'élève fasse toute la démarche pour trouver I."

L'enseignant critique les environnements ayant dans des menus des primitives "intersection droite-plan" ou "intersection plan-plan". En effet, dans ce cas, l'élève ne

fait pas "toute la démarche" au sens de construction effective avec la seule primitive "intersection droite-droite", comme il l'a explicité ci-dessous, en précisant qu'un point ne peut être obtenu que comme intersection de deux droites. Cependant, avec Geospace il faut autoriser la seule primitive "intersection de deux droites" et ensuite utiliser la primitive "intersection d'une droite avec un plan" comme moyen de validation de la construction.

H : "Proposerez-vous cet exercice avec ce logiciel ?"

E.JC : "Dans ce cas je ne formulerais pas l'exercice comme ça. Je marquerais, construire les éléments qui conduisent à l'intersection. Parce que pour moi, les élèves me donnent le point comme intersection de deux droites. Des fois, quand je travaille sur Cabri en géométrie dans l'espace, je leur disais, tracez les droites qui conduisent à l'intersection. C'est ce que je ferai ici avec Géospace, et ensuite on utilisera le menu "intersection d'une droite avec un plan" pour vérifier la construction, de voir si c'est le même. L'exercice serait là complet. Sinon, l'élève n'aura rien compris.

b) Activité GEO.2

Dans cette activité, il utilise "Rappel" des éléments pour comprendre la démarche de l'élève. Ensuite, il vérifie par déplacement si le point E est libre. Quant à l'intersection de la droite (X) avec le plan il se demande comment l'élève a fait étant donné que le point J est mobile sur la droite (X). Une fois que la démarche de l'élève lui a été explicitée, il revient sur l'intérêt de l'utilisation de Geospace.

E.JC: "Il faut consacrer plus de temps avec les élèves dans ces situations.

E.JC : "Pour les élèves en difficulté, c'est bien de les faire manipuler les objets tout faits, ça leur permet de réfléchir à partir des messages de l'ordinateur, de manipuler, parce qu'ici c'est facile par rapport à Cabri."

H propose une solution avec un menu sans "intersection droite-plan" utilisant l'intersection "plan-plan" du plan (A,d) avec P.

E.JC : "C'est intéressant parce qu'on a l'intersection indépendamment du plan choisi."

Ainsi, il pense que l'utilisation de l'environnement informatique Geospace, peut être bénéfique pour les élèves en difficultés parce qu'il permet : la manipulation des objets (aspect dynamique), le raisonnement (par la rétroaction du milieu) et que les situations sont plus accessibles pour ces élèves, par rapport à cabri 1, en utilisant des primitives "intersection de plans" ...etc.

c) Activité GEO.3

Il procéde de la même façon que pour le cas de GEO.2 pour les moyens de contrôle. Il trouve que c'est un exercice intéressant par rapport au type du raisonnement, mais qu'on ne peut pas le résoudre sur papier crayon ou avec Cabri 1. Alors qu'avec la possibilité qu'offre ce logiciel, on peut réaliser la construction. Cependant, le logiciel ne rend pas visible les plans (E, D) et (E, D') .

2.3.4. Conclusion

Les productions papier-crayon étaient évaluées par l'enseignant E.JC, selon le rapport institutionnel R2.
Du questionnaire, nous retenons que l'utilisation de l'environnement informatique[18] par cet enseignant a pour objectif l'utilisation des propriétés de la géométrie dans l'espace pour résoudre un problème de construction avec les primitives de Cabri I. Le dessin est une finalité, comme dans les problèmes de construction effective sur papier crayon. De plus, la tâche est plus difficile que lorsqu'on travaille sur papier-crayon car il faut envisager les différents cas. En effet, comme la validation sur cabri se fait par déplacement, on est confronté à une simulation de 3D sur Cabri 2D.
Il est clair que ces situations sont riches sur le plan du raisonnement et de la mobilisation des propriétés géométriques. Cependant, le dessin-cabri n'est pas une aide pour la phase heuristique, mais c'est un moyen pour la mise en oeuvre des propriétés géométriques, comme le cas du papier-crayon. De plus, cet environnement ne permet pas aux problèmes de construction évoquée de vivre.
Comme moyens de contrôle, il a utilisé la fonction "Rappel" et déplacement des objets libres. Il pense que l'utilisation de l'environnement Geospace est moins riche pour les élèves que l'environnement Cabri I. Cependant, pour les élèves en difficulté, on peut utiliser Geospace pour trois objectifs: manipulation des objets, interaction entre l'élève et l'environnement et prise en charge par l'environnement de certains constructions d'intersection.

3. CONCLUSION

Les trois enseignants ont évalué les productions "papier-crayon" selon le rapport R2.

L'enseignant E.CF, a présenté l'environnement informatique comme "modèle d'expérimentation". L'enseignant avait deux rapports aux problèmes de construction dans l'espace selon qu'on travaille dans l'environnement "papier-crayon" ou

[18] Ici, il s'agit de Cabri géomètre I

"informatique". En particulier, l'analyse des "activités Geospace" confirme de nouveau que les problèmes de construction effective et évoquée peuvent coexister dans un environnement informatique.

Pour l'enseignant E.CH, les productions "papier-crayon" et "environnement informatique" ont été évaluées selon le même rapport institutionnel R2. Il attend de l'utilisation d'un environnement informatique des apports au niveau de la perception, que l'environnement "papier-crayon" ne permet pas de développer. En revanche, au niveau de la résolution des problèmes, il attend qu'il n'y ait pas de changement entre les deux environnements. En effet, il pense que les situations dans l'environnement informatique ne doivent pas générer une rupture du contrat didactique quant à la résolution de problème par rapport à l'environnement "papier-crayon".

Enfin, pour l'enseignant E.JC, les problèmes de construction évoquée n'ont pas été rejetés comme dans le cas de l'enseignant E.CH. Il affirme que l'utilisation de Geospace est moins "intéressante" que celle de Cabri, puisque dans ce dernier les situations sont plus riches du point de vue du raisonnement et de la mobilisation de propriétés d'incidence.

	E.CH	E.CF	E.JC
Logiciels utilisés	Geospace (1° année)	Cabri I pour le plan Geospace pour l'espace	Cabri I pour le plan et l'espace
Activités papier-crayon	**E**valuées selon le rapport institutionnel R2.	**E**valuées selon le rapport institutionnel R2	**E**valuées selon le rapport institutionnel R2.
Objectifs environnements informatiques	**D**évelopper la perception **M**aîtrise de la lecture des dessins	**D**évelopper la perception **M**odèle d'expérimentation	**R**ichesses des situations / raisonnement.
Activités Geospace	**A**ucun moyen de validation utilisé. **A**ctivités non intéressantes - rupture du contrat didact. / au papier-crayon. - ne développent pas la perception.	**M**oyens de validation : dessin, historique et les relations géométriques. **S**ituations intéressantes, par la richesse du raisonnement.	**M**oyens de validation : Rappel, déplacement des objets libres. **S**ituations moins riches qu'avec cabri I. Mais intéressantes pour les élèves en difficultés.

Nous constatons que les enseignants avaient les mêmes rapports aux problèmes de construction dans l'espace dans le cas de l'environnement papier-crayon, en particulier ils ont utilisé les mêmes critères pour analyser les productions d'élèves. Alors qu'une diversité dans l'analyse des productions d'élèves faite par ces enseignant est apparue dans le cas de l'environnement informatique.

Cette étude montre que le rapport des enseignants aux "problèmes de construction dans l'espace", dans un environnement informatique dépend de leur rapport à l'objet "environnement informatique", en particulier, si l'enseignant accepte ou non que l'objet "problème de construction" puisse vivre différemment dans l'environnement "informatique" et dans l'environnement "papier-crayon". Dans le cas où il l'accepte, nous nous interrogeons sur les moyens qu'à l'enseignant de gérer cette différence.

En absence d'un manuel proposant des nouvelles situations pour la vie des problèmes de construction dans l'environnement informatique, les enseignants exploitent les situations "papier-crayon" dans l'environnement informatique, avec un l'intérêt de développer la perception des objets de l'espace. Comme si les difficultés des élèves en géométrie dans l'espace résidant essentiellement au niveau de la perception.

CONCLUSION

Des travaux récents portant sur la résolution des problèmes de géométrie ont souligné l'importance de la fonction d'expérimentation du dessin dans la phase heuristique de la résolution. Or, ces travaux concernent essentiellement le cas de la géométrie plane (chapitre A, 5.1). Il nous a paru important de nous poser les mêmes questions pour la géométrie dans l'espace, moins étudiée dont on sait pourtant les difficultés d'enseignement et d'apprentissage grâce aux quelques travaux trop peu nombreux sur le thème.

Nous avons montré *qu'a priori la fonction d'expérimentation du dessin "papier-crayon" en géométrie dans l'espace, ne peut être remplie au même titre que dans le plan* (chapitre A, 6). Cette conclusion repose en partie sur les résultats du chapitre B à propos de la lecture d'un dessin. De là, deux directions de recherche ont été adoptées. La première a consisté à s'interroger sur les fonctions du dessin "papier-crayon" dans les problèmes de géométrie dans l'espace (Partie C). La deuxième a consisté à étudier le rôle que peuvent jouer les environnements informatiques quant aux fonctions du dessin modèle d'un objet géométrique dans l'espace (Partie D). Pour cela, trois études ont été menées :
- lecture d'un dessin de l'espace (chapitre B)
- écologie des problèmes de construction dans l'environnement papier-crayon (chapitres C1 et C2) et dans l'environnement informatique (chapitre D1)
- rapports des enseignants aux problèmes de construction dans les environnements "papier-crayon" (chapitre C3) et "informatique" (chapitre D2).

Lecture d'un dessin de l'espace

L'enseignement fait appel d'une part à des conventions et d'autre part à des représentations-types, pour exprimer des propriétés géométriques qui ne peuvent pas être traduites en des propriétés spatiales sur le dessin (afin d'élargir le domaine de fonctionnement du dessin). Dans le chapitre B, nous avons validé l'hypothèse de recherche "Convention" :

Les conventions de représentation de la perspective cavalière deviennent des règles d'interprétation d'un dessin chez les élèves.

Pour cela, nous avons repris et modifié un questionnaire proposé par Parzysz, notamment en exigeant des élèves de fournir des justifications pour leur réponses. Dans ce questionnaire, les élèves devaient répondre à des questions portant sur des propriétés d'incidence à partir du seul dessin qui leur était fourni.

L'analyse a montré que les justifications basées uniquement sur l'évidence de la perception sont minoritaires. Les justifications utilisent des propriétés géométriques sous un contrôle perceptif et certaines étapes se limitent à une simple lecture du dessin par l'utilisation d'une règle d'interprétation. De plus, nous avons montré qu'il y a une absence de conflits entre les connaissances géométriques et la lecture du dessin, puisque les conventions et les représentations-types sont des illustrations des propriétés géométriques. Cela ne peut que renforcer l'usage des règles d'interprétation.

Ecologie des problèmes de construction

Nous avons choisi d'étudier le rôle du dessin à travers la résolution des problèmes de construction dans l'espace pour la mise à l'épreuve de l'hypothèse de recherche "fonctions du dessin comme contraintes" :

Le dessin, par ses nouvelles fonctions en géométrie dans l'espace après la réforme des mathématiques modernes, constitue une contrainte sur la vie de certains objets dans l'espace .

Nous nous sommes placés dans une perspective écologique dans la mesure où l'on s'intéresse aux interrelations possibles entre l'objet "dessin" et l'objet "problème de construction" dans l'institution "enseignement secondaire" (chapitre A, 6.1).
Ce choix semble être pertinent pour notre questionnement. En effet, nous avons montré que les problèmes de construction ont évolué sous deux contraintes : "solide" et "dessin". Ceci est le résultat d'une double démarche : mise en évidence de l'évolution des problèmes de construction dans l'espace et étude des raisons de cette évolution. Ces deux études concernent le cas de l'environnement papier-crayon (chapitres C1 et C2).

Evolution des problèmes de construction dans l'espace au cours de ce siècle

La méthodologie que nous avons adoptée consiste en l'analyse des exercices résolus et des commentaires des auteurs dans les manuels des deux périodes 1923-69 (période 1) et 1982 à nos jours (période 3), mais à des moments où le rapport institutionnel aux objets "problèmes de construction" et "dessin" est stable (chapitre C1). Nous avons fait une analyse parallèle entre le cas de la géométrie plane et le cas de la géométrie dans l'espace. Cette étude a mis en évidence et a caractérisé l'évolution des problèmes de construction dans l'espace au cours de ce siècle.

Les problèmes de construction ont été caractérisés par rapport aux deux composantes : algorithme de construction et procédé de tracé. Un des résultats de cette étude est que les exigences de l'institution "enseignement secondaire" par rapport aux procédés de tracé ne sont pas les mêmes pour les périodes 1 et 3.

Pour certaines constructions, la réalisation effective de la construction de certains objets de l'espace n'est pas possible selon les règles de la représentation adoptées (la perspective cavalière). Par exemple, sauf à l'élaborer de façon arbitraire, la représentation de l'intersection de deux plans ou d'une droite et d'un plan ne peut pas être obtenue par des constructions auxiliaires se ramenant à l'intersection des droites. Ceci nous a conduit à introduire (chapitre C1, 1.2.2) la notion de "règle d'usage" :

Une règle d'usage est une pratique qui a le statut d'une convention : elle donne le droit de représenter un objet géométrique de façon arbitraire.

Concernant les problèmes de construction en géométrie dans l'espace, on peut retenir au moins trois règles d'usages concernant les problèmes d'incidence:
RU(P,P) : "représenter de façon arbitraire l'intersection, lorsqu'elle existe, de deux plans".
RU(P,D) : "représenter de façon arbitraire l'intersection, lorsqu'elle existe, d'un plan et d'une droite".
RU : "représenter de façon arbitraire l'intersection, lorsqu'elle existe, d'une droite et d'un plan ; de deux plans"

Ainsi, au cours de la période 1, les solutions de problèmes de construction dans l'espace peuvent utiliser la règle d'usage RU. D'autres institutions peuvent adopter une autre règle d'usage. Par exemple, dans un ouvrage mathématique suisse pour l'enseignement

de la géométrie dans l'espace[1], il est dit de façon explicite qu'on peut "introduire la droite d'intersection de deux plans sécants". Il s'agit de la règle d'usage RU(P,P). Ces auteurs soulignent que la différence entre le plan et l'espace par rapport au tracé réside essentiellement sur le caractère effectif ou non du tracé. Des remarques analogues ont été formulées par des auteurs de manuels français de la période 1, comme une note de Hadamard dans son ouvrage sur la géométrie dans l'espace (chapitre C1, 1.2).
Nous avons alors distingué deux types de problèmes de construction: *effective ou évoquée*. Un problème de construction évoquée est un problème dont la résolution ne peut se faire qu'à l'aide des règles d'usage. Dans le cas où la résolution du problème peut se faire sans le recours à une règle d'usage, le problème est dit de construction effective.

Pendant la période 1, les problèmes de construction en géométrie plane et dans l'espace utilisent les mêmes démarches de résolution. Mais au niveau du procédé de tracé il y avait une différence, étant donné que dans le cas de la géométrie dans l'espace, on faisait appel à des primitives de tracé (comme en géométrie plane) et à des règles d'usage.

Pendant la période 3, les problèmes de construction en géométrie plane et dans l'espace n'ont plus la même démarche de résolution. En géométrie plane, la démarche de résolution se fait à l'aide de l'"analyse-synthèse" largement développée dans les manuels. Alors qu'en géométrie dans l'espace, la phase heuristique est absente et la méthode de résolution proposée par les auteurs des manuels est centrée sur l'algorithme de construction. Cependant, au niveau du tracé, les exigences sont les mêmes pour les problèmes de construction en géométrie plane et dans l'espace. Il s'agit de procédés de tracé à la règle et au compas.

Nous avons aussi étudié les interrelations entre les objets "problèmes de construction" et "dessin" et plus précisément, les fonctions du dessin dans les problèmes de construction en géométrie dans l'espace. Au cours de la période 1, le dessin était seulement un support du raisonnement. De plus, le problème du tracé a été évacué pour les raisons d'insuffisance du dessin dans le mode de représentation en perspective cavalière, et renvoyé à la géométrie descriptive qui le prend en charge. Nous pensons alors que la production d'un tracé par un élève n'était pas nécessaire. En revanche, pendant la période 3, le problème du tracé non seulement n'est plus évacué, mais il est l'objet même du problème, dans le sens où la démarche de résolution propose un algorithme de

[1] Introduction à la géométrie dans l'espace, par A. Delessert, Ed. L.E.P. Lausane, 1992.

construction qui permet d'avoir un procédé de tracé à la règle et au compas. Autrement dit, le tracé est devenu une finalité du problème de construction dans l'espace.
Donc, les problèmes de construction en géométrie dans l'espace ont évolué par rapport à la démarche de résolution et par rapport à l'algorithme de construction (avec les exigences du procédé de tracé). En particulier, les problèmes sont passés de "problèmes de construction évoquée" pendant la période 1 à des "problèmes de construction effective" pendant la période 3.

L'analyse des résolutions des deux types de problèmes de construction, effective et évoquée, proposées dans les manuels nous a conduit à penser que les exigences par rapport aux productions d'élèves pour ces deux types de problèmes ne sont pas les mêmes, ce qui nous a amené à l'hypothèse de recherche "papier-crayon" :

Ces deux types de problèmes ne peuvent pas coexister dans l'environnement papier-crayon, puisque chacun d'eux nécessite un contrat différent par rapport aux productions d'élèves.

Raisons de cette évolution

Pour expliquer les raisons de l'évolution des problèmes de construction dans l'espace, nous avons analysé les programmes et les manuels lors des différents états du programme au cours de la période 3 (chapitre C2). L'intérêt de cette démarche est que l'analyse faite entre le premier état des programmes de la période 3 et le dernier état des programmes, où on a supposé une stabilité dans la vie des objets, a permis de caractériser davantage l'évolution des problèmes de construction dans l'espace et a mis en évidence les contraintes expliquant cette évolution.

L'analyse a montré qu'après 1982, les deux types de problèmes se sont mis à vivre dans certains manuels. Mais sous les contraintes "dessin" et "solide", seuls les problèmes de construction effective ont résisté. De plus, ils ont pris une place importante dans les éditions de 1987 et 1990.

Sous la contrainte "dessin", la production d'un tracé est devenue l'enjeu du problème de construction de géométrie dans l'espace, comme en géométrie plane. En particulier, le tracé doit être réalisé selon un procédé de tracé à la règle et au compas. De plus, ce dernier exige un algorithme de construction spécifique caractérisant les problèmes de construction effective.

En fait, nous avons considéré une directive du programme "*la pratique des figures est centrale en géométrie plane comme en géométrie dans l'espace*" comme contrainte sur la vie des objets de géométrie et en particulier, la résolution des problèmes de géométrie. Seulement, cela ne se traduit pas de la même façon en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace car, comme nous l'avons développé dans le chapitre A, dans chacune de ces "deux géométries" le dessin ne peut remplir les mêmes fonctions et plus particulièrement la fonction d'expérimentation. Pour les problèmes de construction, cela s'est traduit de plus par l'évolution de la démarche de résolution et donc de la tâche du problème (chapitre C2).

Cette évolution des problèmes de construction va s'exprimer par un changement de types d'interrelation avec d'autres objets comme "propriétés d'incidence dans l'espace". En effet, la résolution des problèmes de construction nécessite la mobilisation des propriétés d'incidence dans l'espace. Pour les problèmes de construction effective, l'algorithme de construction doit être selon les schémas développés dans le chapitre C2. Dans l'analyse des manuels nous avons remarqué que le champ de propriétés d'incidence pouvant être mobilisé pour la résolution des problèmes de construction évoquée est plus large que les problèmes de construction effective. Cela reste à vérifier.

Rôle des environnements informatiques

Pour la question du rôle que peuvent jouer les environnements informatiques quant aux fonctions du dessin, modèle d'un objet géométrique dans l'espace, nous avons mis à l'épreuve l'hypothèse "environnement-informatique"*:*

Les problèmes de construction effective et de construction évoquée peuvent coexister dans des environnements informatiques répondant à certains critères.

Pour cela, nous avons analysé la vie des problèmes de constructions effective et évoquée dans l'environnement informatique Geospace (Chapitre D1). Cette étude a montré que les deux types de problèmes de construction effective et évoquée peuvent coexister par l'existence des primitives géométriques ne permettant pas l'arbitraire dans le dessin.
L'étude de ce logiciel, Geospace, a montré que si les choix effectués permettent d'élargir le champ d'expérimentation du dessin, ils peuvent induire ou renforcer des conceptions erronées chez des élèves et des ambiguïtés quant à l'interprétation des rétroactions. De plus, ces choix sont susceptibles de modifier la vie des objets, les interrelations entre les

objets et donc les rapports des élèves et des enseignants à ces objets. Cela nous conduit à la proposition suivante :
Proposition 1

Il est nécessaire de mener une analyse didactique pour la conception d'un environnement informatique destiné à l'enseignement. Pour la géométrie dans l'espace, cette analyse concerne au moins trois pôles : manipulation directe, choix de représentation et les primitives géométriques.

Nous avons amorcé un début de questionnement sur les choix déjà effectués dans le prototype actuel, du logiciel Cabri-3D, pour montrer que les choix du concepteur doivent être le produit d'une réflexion et d'une analyse didactique.
Nous pensons que ce travail devrait être poursuivi en particulier pour le pôle de représentation des objets de l'espace.
Dans le chapitre D1, nous avons aussi entrepris l'étude des environnements informatiques par rapport à la problématique du dessin. Nous avons examiné comment un environnement informatique peut élargir le champ d'expérimentation du dessin modèle d'un objet géométrique dans l'espace, par l'importance des éléments suivants : la manipulation directe, l'usage des primitives et les rétroactions de l'environnement (perceptives et / ou par des messages). L'hypothèse de travail "dessin - environnement informatique" pour le cas de la géométrie plane est donc valable aussi dans le cas de la géométrie dans l'espace :

Sous certains critères, l'environnement informatique peut élargir le champ d'expérimentation du dessin modèle d'un objet géométrique du plan ou de l'espace.

Il reste à voir si effectivement l'utilisation d'un tel environnement informatique permet au dessin d'avoir un rôle heuristique dans les résolutions de problème de géométrie dans l'espace. Pour cela, deux études seraient nécessaires :
- sur les moyens d'intégration de l'environnement informatique dans une classe de mathématique (conception de situation),
- l'évaluation chez des élèves ayant utilisés un tel environnement.

Nous avons montré que les rétroactions de l'environnement informatique peuvent disqualifier les règles d'interprétation d'un dessin, chez les élèves, par l'importance des rétroactions offertes par l'environnement (chapitre D1). Une étude similaire que celle que nous avons réalisée avec le dessin "papier-crayon" sous forme de questionnaire (chapitre B) reste à faire pour le cas d'un dessin "environnement-informatique".

Rapports des enseignants aux problèmes de construction dans les environnements "papier-crayon" et "informatique".

Comme les problèmes de construction évoquée ne vivent plus dans l'enseignement actuel, nous avons mis en place un questionnaire dans lequel nous avons fait vivre pour des enseignants les deux types de problèmes de construction (Chapitre C3). Cela, nous a permis de voir, sous la contrainte du rapport personnel à l'objet de savoir "problème de construction dans l'espace", ce que l'enseignant accepte, rejette, exige sur les problèmes et les réponses attendues à ces problèmes de construction effective et évoquée.
Nous avons fait réagir des enseignants à des exercices et à des productions d'élèves choisies en fonction de nos variables, sous forme d'un questionnaire et d'interview.
Lorsque nous avons proposé des "exercices" non accompagnés de réponses d'élèves, les enseignants ont manifesté des rapports aux problèmes de construction différents du rapport institutionnel à ces problèmes dans l'enseignement actuel. En revanche, dans la partie "exercices avec production d'élèves", ils avaient des rapports, aux problèmes de construction, conformes au rapport institutionnel. Ainsi, face à des "exercices" seuls, un enseignant peut utiliser une règle d'usage pour la résolution d'un problème de construction, alors qu'il rejetterait une réponse d'élève utilisant cette règle d'usage.
Nous avons constaté que pour la résolution des problèmes de construction évoquée, les enseignants proposaient des solutions utilisant la règle d'usage RU(P,D) et non la règle d'usage RU(P,P). Nous avons alors avancé une hypothèse qui reste à vérifier :

Dans les problèmes de construction évoquée, l'utilisation de la règle d'usage RU(P,D) est plus mobilisée que la règle RU(P,P).

Notre hypothèse se base sur le fait que les conventions de représentation nous donnent plus d'éléments de contrôle dans le cas de l'intersection d'un plan et d'une droite que dans le cas de deux plans.

Parmi les attentes de l'enseignant par rapport aux productions d'élèves pour les problèmes de construction dans l'espace, nous avons mis en évidence une règle "Construction évoquée / PC_{ef}":

Une réponse correcte à un problème de construction effective utilisant une construction évoquée est rejetée

Le tracé est exigé par les enseignants dans les productions d'élèves. De plus, la réalisation du tracé est un moyen pour eux de vérifier le critère effectif de la construction. Nous avons aussi montré que la négociation des éléments du contrat didactique, pour la résolution des problèmes de construction dans l'espace, se fait par des exigences au niveau du tracé.

Cette étude nous a permis de confirmer l'hypothèse de recherche "papier-crayon", selon laquelle les deux types de problèmes de construction effective et évoquée ne peuvent coexister dans l'environnement papier-crayon, et de caractériser les attentes des enseignants par rapport aux productions d'élèves relatives aux problèmes de construction en géométrie dans l'espace.

Un dispositif expérimental analogue a été réalisé auprès des enseignants ayant utilisé un environnement informatique pour la géométrie dans l'espace (chapitre D2). L'analyse a montré que le rapport des enseignants à un objet d'enseignement qui vit dans un environnement informatique dépend en fait de leur rapport à l'objet "environnement informatique" lui même : en particulier, si l'enseignant accepte ou non qu'un objet puisse vivre différemment dans l'environnement "informatique" que dans l'environnement "papier-crayon". Dans le cas où il l'accepte, nous nous interrogeons sur les moyens qu'a l'enseignant pour gérer cette différence.

En absence d'un manuel proposant des nouvelles situations pour la vie des objets dans l'environnement informatique, les enseignants exploitent dans l'environnement informatique les situations "papier-crayon", prises dans les manuels classiques. Or, les situations proposées par les manuels classiques ne prennent pas en compte la dimension "informatique". Les enseignants justifient l'utilisation du logiciel pour développer la perception des élèves.

Cela nous conduit à formuler deux propositions :

Proposition 2

L'intégration dans la formation, initiale ou continue, des enseignants, d'un enseignement spécifique de l'utilisation des environnements informatiques dans une classe de mathématiques est nécessaire. Cette formation a pour objectif de leur faire prendre conscience en quoi les environnements informatiques modifient la vie des objets par rapport à l'environnement papier-crayon et de leur donner les moyens, en termes d'outils, de gérer ce changement.

Proposition 3

Il paraît important de mettre à disposition des enseignants des manuels spécifiques, non pour l'utilisation du logiciel, mais proposant des situations pouvant être réalisées en classe.

Retour critique sur la méthodologie et perspectives

Nous avons montré que sous les contraintes "dessin" et "solide", les problèmes de construction ont changé au cours de ce siècle. La question que nous soumettons porte sur l'exhaustivité des contraintes. En effet, celles-ci ont été dégagées à partir de l'analyse des programmes et des manuels en étudiant la vie de certains objets et de leur interrelations. Il s'agit des objets "dessin", "problèmes de construction" et "géométrie dans l'espace". Nous avons vu qu'il existe des interrelations entre l'objet "problème de construction dans l'espace" et l'objet "propriétés d'incidence". Nous nous sommes demandés (ci-dessus) si le changement de vie des "problèmes de construction" a modifié la vie de l'objet "propriété d'incidence". Or on peut se demander si l'évolution des problèmes de construction n'est pas aussi une conséquence d'un changement de vie de l'objet "propriétés d'incidence", lui même résultat d'un changement de vie d'un autre objet. Cela, renvoie donc à l'écologie des "propriétés d'incidence dans l'espace" et à l'étude de ses interrelations avec l'objet "problème de construction". A partir de cette étude on peut voir si la prise en compte de l'objet "propriétés d'incidence" n'est pas une autre contrainte pour la vie des problèmes de construction dans l'espace.
La théorie anthropologique nous a permis de mettre en évidence des conditions de possibilités de fonctionnement d'un système didactique à propos d'un objet "dessin en géométrie dans l'espace" et plus précisément "dessin dans la résolution des problèmes de construction dans l'espace". Nous pensons que ce travail peut constituer un point de départ d'autres études (cf les questions soulevées dans les paragraphes ci-dessus) relevant de l'écologie ou de l'économie du système didactique (nous avons formulé ci-dessus quelques questions pouvant relever de ces études).

Une partie de notre travail a consisté à étudier le rapport institutionnel à l'objet "problèmes de construction dans l'espace" et le rapport des enseignants à cet objet. Certains éléments de cette étude peuvent être considérés dans la problématique du contrat didactique. En particulier, les éléments des observations des enseignants (chapitre C3) dans leur classe. Ce travail peut contribuer à l'étude de l'articulation entre l'économie et l'écologie d'un système didactique (à ce propos nous renvoyons au travaux de D. Menssouri, 1994 et T. Assude, 1996).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC G. (1989) La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans. In *Actes de la 13ème conférence Psychology of Mathematics Education* (Vol.I pp.85-92). Paris : Ed. GR Didactique.

ARSAC G., CHAPIRON G., COLONNA A., GERMAIN G., GUICHARD Y., MANTE M. (1992) *L'initiation au raisonnement déductif au collège*. Lyon : IREM de Lyon et PUL.

ASSUDE T. (1996) De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas. *Recherches en didactique des mathématiques* 16(1) 47-70.

BALACHEFF N. (1994a) Transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds)*Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp.364-370). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BALACHEFF N. (1994b) Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactiques des mathématiques* 14 (1/2) 9-42.

BAULAC Y., BELLEMAIN F., LABORDE J.M (1988) *Cabri-Géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie,* logiciel et manuel d'utilisation, version 1.0, Macintosh de Apple. Paris : Nathan-Logiciels.

BELLEMAIN F. (1992) *Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie: Cabri-géomètre*. Thèse. Grenoble : Université Joseph Fourier.

BELLEMAIN F., CAPPONI B. (1992) Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. *Educational Studies in Mathematics* 23(1) 59-97.

BELLEMAIN F., LABORDE J.M. (1994) Cabri-géomètre II, version 1.0 MS-DOS et Macintosh, Texas-Instruments, Dallas.

BESSOT D. (1983) Problèmes de représentation de l'espace. *Bulletin inter-Irem "Enseignement de la géométrie"* (23) 33-39.

BKOUCHE R., SOUFFLET M. (1983) Axiomatique, formalisme, théorie. *Bulletin Inter-Irem "Enseignement de la géométrie"* (23) 3-24.

BESSOT A., DEPREZ S., EBERHARD M., GOMAS B. (1993) Une approche didactique de la lecture de graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment. In Bessot A. et Vérillon P. (eds) *Espace graphique et*

graphismes d'espace. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1982) Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. In *Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique* (pp.183-226). Grenoble : LSD-IMAG.

CHEVALLARD Y. (1989) Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. In *Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique* (pp.211-235) Grenoble : LSD-IMAG.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1) 73-112.

CHEVALLARD Y. (1994) Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In Arsac et al. (eds) *la transposition didactique à l'épreuve* (pp.135-180). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1991) Autour de l'enseignement de la géométrie. *Petit x* 27, 41-76.

CORDIER F., CORDIER J. (1991) L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en didactique des mathématiques* 11 (1) 45-64.

DELESSERT A. (1992) *Introduction à la géométrie de l'espace*. Lausanne : L.E.P. Loisirs et pédagogie.

DUVAL R. (1988) Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 1, 57-74.

DUVAL R. (1994) Les différentes fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères17*, 121-138.

DUVAL R. (1988) Approche des problèmes de géométrie en terme de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 1, 57-74.

FISHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* 24(2) 139-162.

FREGONA D. (1995) *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques*. Thèse. Bordeaux : Université Bordeaux I.

GARDIES J.L. (1991) *Le raisonnement par l'absurde*. Paris : PUF.

GRENIER D. (1988) Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème. Thèse. Grenoble : Université Joseph Fourier.

HEATH T.L. (1956) *Euclid. The thirteen books of the Elements* (Vol.1). New York : Dover Publications.

LABORDE C., CAPPONI B. (1992) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. In *Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique* (pp. 175-218). Grenoble : LSD-IMAG.

LABORDE C., CAPPONI B. (1995) Modélisation à double sens. In Noirfalise (ed) *VIII[e] école et université de didactique des mathématiques* (pp. 265-278). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (1) 165-210.
LABORDE C. (1992) Enseigner la géométrie : permanences et révolutions, conférence plénière au *7ème congrès international sur l'enseignement des mathématiques, ICME 7*, Québec, Canada, août 1992.

MENSOURI D. (1994) *Essai de délimitation en termes de problématiques des effets de contrat et de transposition : le cas des relations entre droites et équations dans les classes de Seconde et de Première*. Thèse. Grenoble : Université Joseph Fourier.

NOIRFALISE R. (1991) Figures prégnantes en géométrie ? *Repère 2* , 51-58.

PADILLA V. (1990) Les figures aident-elles à voir en géométrie ? *Annales de didactique et de sciences cognitives* 3, 223-252.

PARZYSZ B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Thèse. Paris : Université Paris-7.

PARZYS B. (1991) Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en didactiques des mathématiques* 11 (2.3) 211-240.

ROBERT A. (1995) *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES. I. Géométrie*. Ellipses.

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE

ARSAC G. DEVELAY M. TIBERGHIEN A. (1989) *La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie*. Lyon : IREM de Lyon.

ARSAC G. (1992) L'évolution d'une théorie en didactique : l'exemple de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12 (1) 7-32.

ARTIGUE M. (1991) Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique. *Petit x* 26, 5-27.

ASSUDE T. (1992) *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique : Ecologie de l'objet Racine carré et analyse du curriculum*. Thèse. Grenoble : Université Joseph Fourier.

AUDIBERT G. (1991) La géométrie dans l'enseignement. *Repère 4* , 21-52.

AUDIBERT G. (1992) L'espace en géométrie. *Topologie structurale* 18, 49-62.

AUDIBERT G.(1986) L'enseignement de la géométrie de l'espace. *Bulletin APMEP* 355, 501-526.

AUDIBERT G., KEITA B. (1987) La perspective cavalière et la représentation de l'espace. In *Didactique et Acquisition des Connaissances scientifiques*, *Actes du Colloque de sévres* (pp.87-108). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BALACHEFF N., SUTHERLAND R. (1994) Epistemological domain of validity of microworlds The case of Logo and Cabri-géomètre. In Lewis R, Mendelsohn P. (eds) *Lessons from Learning* (IFIP¨Transactions, A 46, 137-150). Amsterdam : North Holland and Elsevier Science B.V.

BAUTIER T., BOURDAREL J., COLMEZ F., PARZYSZ B. (1987) Représentation plane de figures de l'espace. In *Didactique et Acquisition des Connaissances scientifiques, Actes du Colloque de sévres* (pp.127-147). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BAZIN J.M. (1994) Géométrie: le rôle de la figure mis en évidence par les difficultés de conception d'un résolveur de problèmes en EIAO. In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds)*Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp.371-7). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BELLEMAIN F. (1989) Le logiciel Cabri-Géomètre, un nouvel environnement pour l'enseignement de la géométrie. In *Cahiers du Séminaire de didactique des mathématiques de Rennes.* Rennes : IREM de Rennes.

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et la géométrie dans l'enseignement obligatoire.* Thèse. Université de Bordeaux I.

BESSOT A. (1993) *Représentations graphiques et maîtrise des rapports avec l'espace.* Conférence publique organisée par le CIRADE et le département de mathématique et informatique, UQAM, Montréal.

BESSOT A., EBERHARD M. (1987) Représentations graphiques et théorisation de l'espace des polycubes. Un processus didactique. In *Didactique et Acquisition des Connaissances scientifiques, Actes du Colloque de sévres* (pp. 87-108). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BONAFE F. (1986) Représentation d'un objet de l'espace : la construction d'un problème. *Petit x* 11, 37-64.

BROUSSEAU G. (1989) Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 9(3) 309-338. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHAACHOUA (1995) Conformité de problèmes de construction de géométrie dans l'espace, à des attentes d'enseignants. In *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp.163-188). Grenoble : LSD2-IMAG.

CHEVALLARD Y. (1992) Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x* 30, 5-15.

CHEVALLARD Y. (1991) *La transposition didactique*. Grenoble : la pensée sauvage.

COURIVAUD J. (1991) Le traitement graphique des images de géométrie. *Repère 4*, 5-19.

DEFORGE Y. (1981) *Le graphisme technique, son histoire et son enseignement*.. Paris : PUF.

DOUADY R. (1984) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse d'état. Paris : Université de Paris VII.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) 5-31.

FLADE L., GOLDBERG E., WALSCH W. (1990) Utilisation de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques, potentialités et limites. In *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp.175-187). Grenoble : LSD2-IMAG.

GONSETH F. (1946) *La géométrie et le problème de l'espace*. Ed. Griffon, Neuchâtel.

HILBERT D., COHN-VOSSEN S. (1952) *Geometry and imagination*. New York : Ghelessa publishing company.

HILLEL J., KIERAN C. (1987) Schemas used by 12-year-olds in solving selected turtle geometry tasks. *Recherches en didactique des mathématiques* 8(1/2) 61-102.

LABORDE C. (1988) L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 9(3) 337-364.

LAUR P., NOIRFALISE R. (1991) Une introduction à la perspective cavalière en classe de 6ème. Observation didactique de premières activités, *Petit x* 28, 5-17.

LEBESGUE H. (1950) *Leçons sur les constructions géométriques*. Paris : Gauthier Villards.

MARION J. (1983) Problèmes de constructions géométriques et enseignement de la géométrie. *Bulletin Inter-Irem "Enseignement de la géométrie"* (23) 25-27.

MERCIER A., TONNELLE J. (1992) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, deuxième partie. *Petit x* 29, 15-56.

PARZYSZ B. (1988) Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics* 19(1) 79-92

PIAGET, INHELDER (1947) *La représentation de l'espace chez l'enfant* (1977). Paris : PUF.

PLUVINAGE F. (1989) Aspects multidimensionnels du raisonnement géométrique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 2, 5-24

SALIN M-H., BERTHELOT R. (1994) Phénomènes liés à l'insertion de situations adidactiques dans l'enseignement élémentaire de la géométrie. In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds)*Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 275-82). Grenoble: La Pensée Sauvage.

SINACEUR H. (1991) La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth. *in Actes du 8ème colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques*. Lyon : IREM de Lyon.

STRÄSSER R. (1991) Dessin et figure - Géométrie et dessin technique à l'aide de l'ordinateur. In *Séminaire de didactiques des mathématiques et de l'informatique* (pp.177-189). Grenoble : LSD2-IMAG.

THOMPSON P.W. (1985) Mathematical Microworld and Intelligent Computer Assisted Instruction. In Kearsley G.E. (ed.) *Artificial Intelligence and Instruction : Applications and Methods* Reading MA : Addison Wesley.